

Inhaltsverzeichnis

0	Grundlagen und Theorie des Versuches	1
0.1	Spektroskopie des Wasserstoffatoms	1
0.2	Das Bohr-Atommodell	1
0.2.1	Die bohrschen Postulate	1
0.3	Energieniveaus und Entartung	4
0.4	Der Zeemann-Effekt	6
0.5	Der Spin des Elektrons	7
0.5.1	Das Stern-Gerlach-Experiment	7
0.6	Die Spin-Bahn-Kopplung	8
0.7	Die Feinstruktur des H-Atoms	10
0.8	Die Hyperfeinstruktur	11
0.9	Welche Linien (Korrekturterme) können aufgelöst werden mit der vorliegenden Apperatur?	12
1	Praxis	13
1.1	Versuchsziel	13
1.2	Zubehör	13
1.3	Versuchstheorie	13
1.3.1	Versuchsaufbau	13
1.3.2	Photomultiplier	14
1.4	Durchführung des Versuches	15
1.4.1	Justieren des Spektrographen	15
1.4.2	Messung der Masse von Deuterium und dem Verhältnis Deuterium Wasserstoff	15
1.4.3	Bestimmung der Rydbergkonstanten	16
2	Auswertung	17
2.1	Dispersionsrelation des Gitters	17
2.2	Analyse der Wasserstoff- und Deuteriumlinien	18
2.3	Verhältnis Wasserstoff zu Deuterium	19
2.4	Masse von Deuterium und Masse des Neutron von Deuterium	19

0 Grundlagen und Theorie des Versuches

Wir wollen uns hier mit einigen Grundlagen des Versuches beschäftigen und dabei auf die Theorie der Bohr-Sommerfeldschen-Theorie eingehen.

0.1 Spektroskopie des Wasserstoffatoms

Zunächst wurde nur die sichtbare Strahlung beobachtet. Kirchhoff und Bunsen finden aber 1850 erstmals heraus, dass Elemente charakteristische Linien emittieren. Dies führt 1885 zur Beobachtung der Balmer-Serie, mit ihren drei charakteristischen Linien:

- $H_\alpha=6563\text{\AA}$ (rot)
- $H_\beta=4861\text{\AA}$ (blau)
- $H_\gamma=4340\text{\AA}$ (violett)

Bis 1924 werden noch die Lyman-, Balmer-, Paschen-, Brackett- und Pfund-Serie gefunden.

Abbildung 0.1 zeigt eine der damals benutzten Apparaturen zur Bestimmung von Spektren der Elemente. Die Linien lassen sich mit Hilfe folgender Formel zusammenfassen.

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' \leq n$$

Dabei gibt $R_H = 109677,581 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1}$ die Rydberg-Konstanten an.

Ein typisches Spektrum eines Wasserstoffatoms ist in Abbildung 0.2 dargestellt.

0.2 Das Bohr-Atommodell

0.2.1 Die bohrschen Postulate

- Atome nehmen diskrete strahlungsfreie Energiezustände ein

0 Grundlagen und Theorie des Versuches

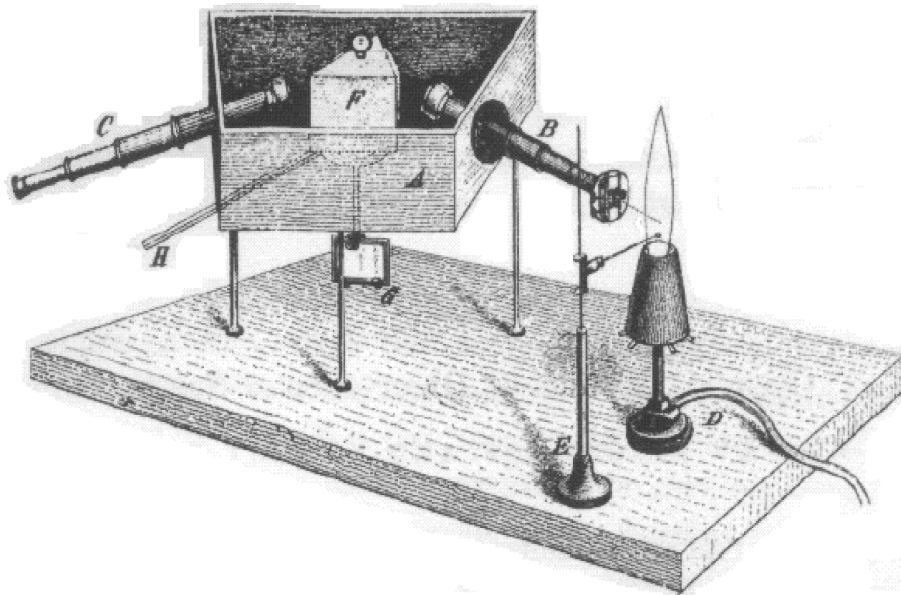


Abbildung 0.1: Die Flamme bringt den Stoff zum Leuchten. Die Zerlegung des Lichtes erfolgt im Prisma, die Detektion durch das schwenkbare Fernrohr.

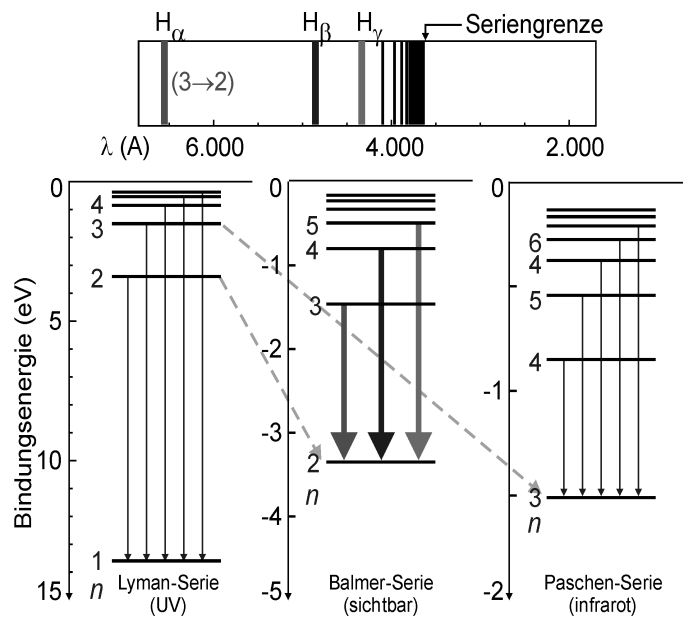


Abbildung 0.2: Oben: der sichtbare Teil des Wasserstoffspektrums, welches aus der Balmer-Serie stammt Unten: Energieniveaus, die die gemessenen Spektren erklären

- Übergänge sind mit Strahlung $h\nu$ verbunden
- Drehimpuls ist quantisiert

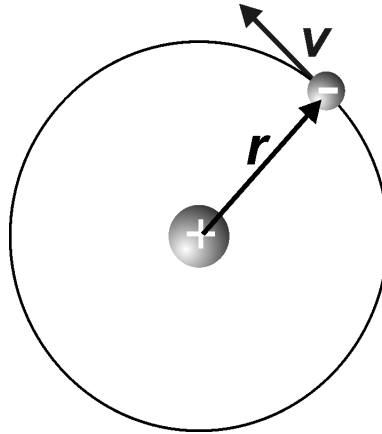


Abbildung 0.3: Das Elektron umkreist den 2000-mal schwereren Kern auf einer Kreisbahn. Man erhält eine kleine Korrektur der Werte, wenn man das Elektron um den Schwerpunkt kreisen lässt. Dies führt zur Isotopieverschiebung zwischen den Linien von Wasserstoff und Deuterium.

Bei Kräftegleichgewicht umkreist das Elektron den Atomker entsprechend folgender Formel:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m\nu^2}{r}$$

Bohrs Quantisierung des Drehimpulses lautet:

$$l = m_e \nu r = n\hbar$$

Es folgen:

- (1) diskrete Umlauffrequenzen

$$\omega_n = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{\hbar^3 n^3}$$

- (2) Bahnradien

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} \cdot n^2$$

(3) Energiezustände

$$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{\hbar^2 n^2} = -\frac{R_\infty}{n^2}$$

Damit folgt für die Rydberg-Konstante:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} = 1,0974 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$$

Das ∞ steht für die Näherung unendlicher Kernmasse. Es folgt also zum Beispiel für $n = 1$:

$$r_{Bohr} = 0,529, \quad \omega_1 = 1016 Hz \quad \text{und} \quad E_1 = 13.59 eV$$

0.3 Energieniveaus und Entartung

Führen wir eine spektroskopische Nomenklatur wie folgt ein:

l	Symbol	Entartung
0	s	1
1	p	3
2	d	5
3	f	7
4	g	9
5	h	11

Zu jedem Wert des Drehimpulses gibt es $2l + 1$ Zustände gleicher Energie. Die Zustände sind also $2l + 1$ -fach entartet. Die Übergänge unterliegen den Auswahlregeln:

- $\Delta l = \pm 1$
- $\Delta m = 0, \pm 1$

Das Termschema des Wasserstoffatoms mit diskreten Energieeigenwerten wird wie folgt angegeben.

$$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{m_e}{\hbar^2 n^2} = -\frac{R_\infty}{n^2}$$

0 Grundlagen und Theorie des Versuches

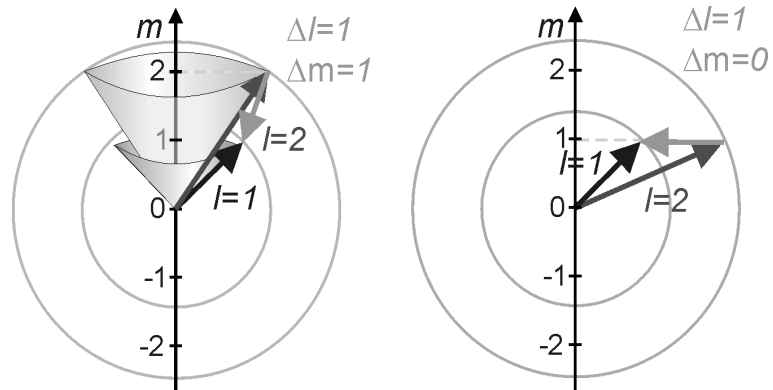


Abbildung 0.4: Übergänge von $l = 2$ nach $l = 1$ mit $\Delta m = 1$ (links) und $\Delta m = 0$ (rechts)

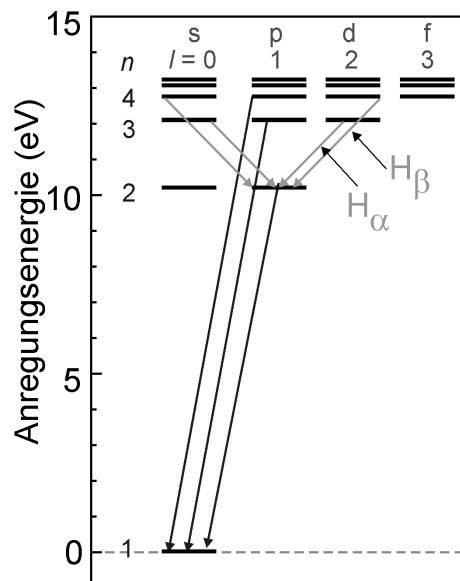


Abbildung 0.5: Energieniveaus des Wasserstoffatoms

0.4 Der Zeemann-Effekt

Der Effekt wurde 1896 von Zeeman beobachtet. Dabei ergaben sich folgende Regeln für Spektrallinien von Atomen im Magnetfeld:

- (i) Spalten in 3 Linien auf (Tripletts)
- (ii) Linienabstand wächst mit B
- (iii) Linienabstand ist für alle Atome gleich

Elektron auf der Kreisbahn besitzen ein magnetisches Moment von:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e}L_z$$

Dadurch ändert sich potentielle Energie im Hamilton-Operator um

$$E_B = -\vec{p}_m \vec{B} = -\frac{e}{2m_e}BL_z$$

Die Energieentartung der Zustände ist somit aufgehoben und es ergibt sich:

$$E_{n,m} = E_n + \frac{eB}{2m_e}\hbar m = E_n + \mu_B B_m$$

Dabei ist $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2732 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ das Bohrsche-Magneton. Die Zeeman-Aufspaltung beträgt:

$$\Delta E = E_{n,m+1} - E_{n,m} = \mu_B B$$

E ist minimal, wenn p_m parallel zu B ist. Dann ist L antiparallel zu B und es ist $m = -l$.

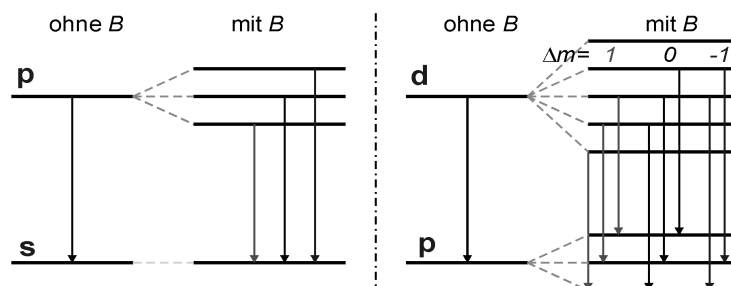


Abbildung 0.6: Aufspaltung von Linien in Tripletts: In beiden Fällen mit Magnetfeld werden Photonen mit drei unterschiedlichen Energien emittiert.

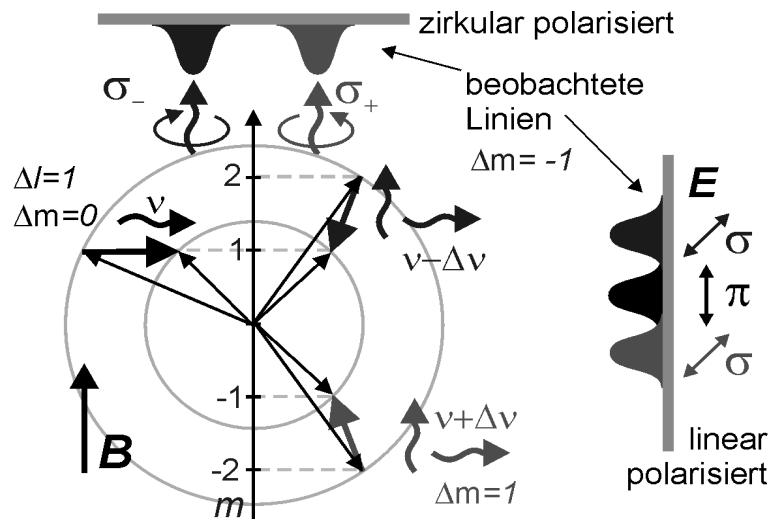


Abbildung 0.7: Beobachtete Linien bei Zeemann-Effekt: 3 Übergänge von $l = 2$ nach $l = 1$. Ein Photon trägt einen inneren Drehimpuls (Spin) von 1, der parallel zur Propagationsrichtung ausgerichtet ist. Parallel zum Magnetfeld kann die unverschobene Linie nicht beobachtet werden.

0.5 Der Spin des Elektrons

Eigenschaften des Elektrons:

- Spinquantenzahl $s = 1/2$
- innerer Drehimpuls (Spin) $S = (s(s + 1))^{1/2}$
- magnetische Spinquantenzahl $m_s = \pm 1/2$

Das magnetische Moment des Elektrons beträgt:

$$\vec{\mu}_S = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S} = -g_s \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

mit $g_s = 2.0024$

0.5.1 Das Stern-Gerlach-Experiment

Auf das magnetische Moment wirkt die Kraft

$$F_z = -\mu_z \frac{dB}{dz} = g_s \frac{e m_s \hbar}{m_e} \frac{dB}{dz}$$

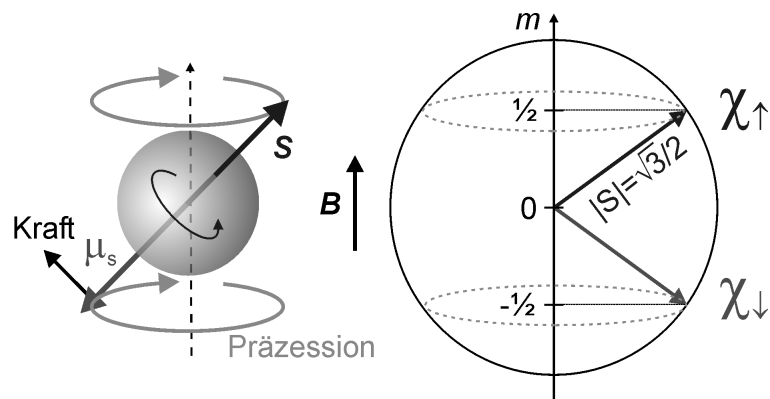


Abbildung 0.8: Der Spin kann als Rotation des Elektrons um die eigene Achse aufgefasst werden (links), wobei das Elektron allerdings punktförmig ist! Im Magnetfeld kann sich der Spin in zwei Positionen ausrichten (rechts). Dann bewirkt das Drehmoment eine Präzessionsbewegung.

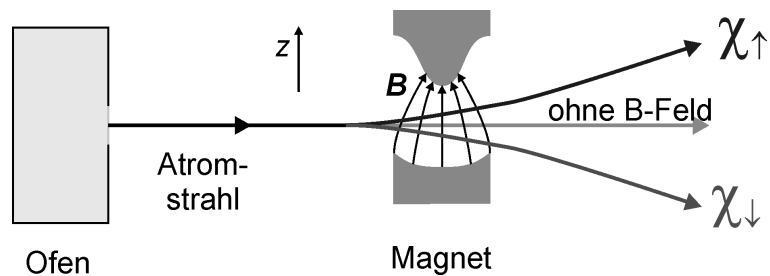


Abbildung 0.9: Ein Strahl aus wasserstoffähnlichen Atomen spaltet in einem Magnetfeldgradienten in zwei nach der magnetischen Spinquantenzahl getrennte Strahlen auf.

Dies führt zur Ablenkung des Strahls in Abhängigkeit von der magnetischen Spinquantenzahl. Im Magnetfeld erzeugt das magnetische Momente ein Drehmoment, das wie beim Kreisel zu einer Präzessionsbewegung mit der Larmor-Frequenz führt:

$$\omega_L = \frac{\vec{p}_m \times \vec{B}}{L_z} = \frac{p_m B}{L} = \frac{\mu_S B}{S} = \frac{2g_S}{\hbar} B$$

0.6 Die Spin-Bahn-Kopplung

Gesamtdrehimpuls des Elektrons setzt sich aus Spin- und Bahnanteil vektoriell zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

0 Grundlagen und Theorie des Versuches

Es gelten die quantenmechanischen Eigenschaften:

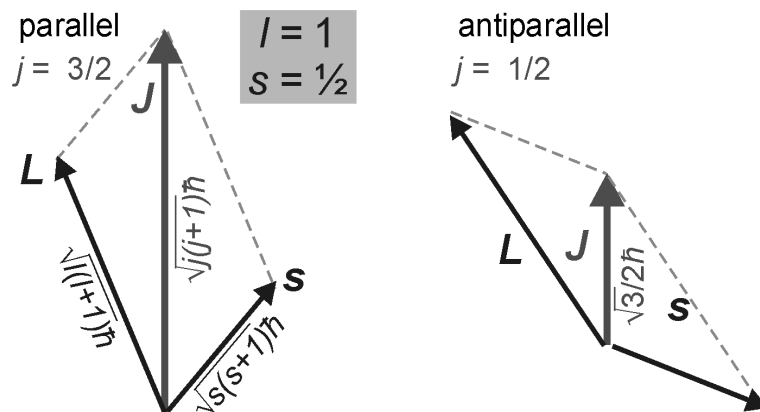
$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$J_z = m_j \hbar$$

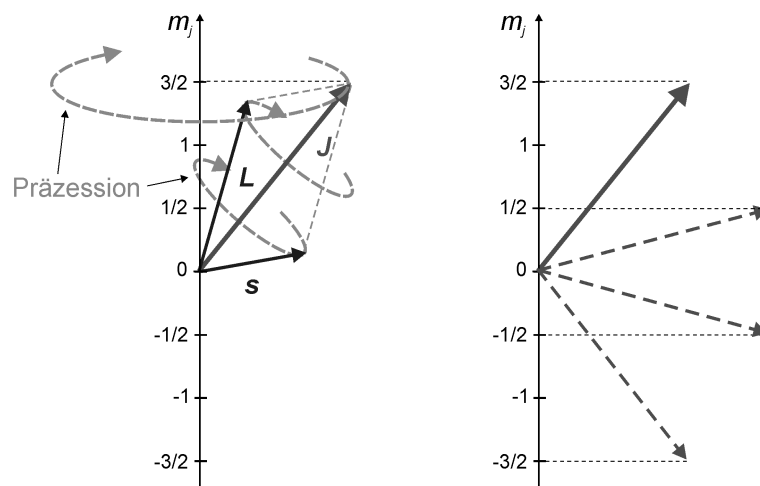
$$-j \leq m_j \leq j$$

Beim H-Atom kann die Gesamtspinquantenzahl je nach Kopplung zwei Werte annehmen:

- parallel: $j = \frac{l+1}{2}$
- antiparallel: $j = \frac{l-1}{2}$



Die Zustände sind $2j+1$ -fach entartet.



Gleichzeitig scharf gemessen können werden:

- Bahndrehimpuls $L_2 = l(l + 1)\hbar$
- Gesamtdrehimpuls $J_2 = j(j + 1)\hbar$
- Projektion des Gesamtdrehimpulses $J_z = m_j \hbar$

Nicht scharf messbar sind die:

- Projektion des Bahndrehimpulses $m_l \hbar$
- Projektion des Spins $m_s \hbar$

Für Übergänge muss gelten:

$$\Delta l = \pm 1, \Delta j = 0, \pm 1, \Delta m_j = 0, \pm 1$$

0.7 Die Feinstruktur des H-Atoms

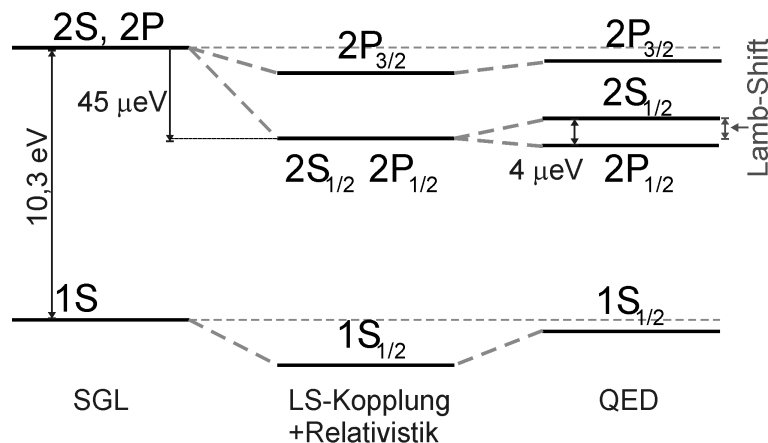
Weitere Korrekturen sind Folge der relativistischen Massezunahme. Aus der relativistischen quantenmechanischen Dirac-Gleichung folgt für die Feinstrukturaufspaltung

$$E_{n,j} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) \right)$$

mit der Sommerfeld-Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Weitere Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik (QED) sind, dass das Elek-



tron im Vakuum ständig Photonen emittiert und absorbiert und so für kurze Zeit eine veränderte kinetische Energie besitzt.

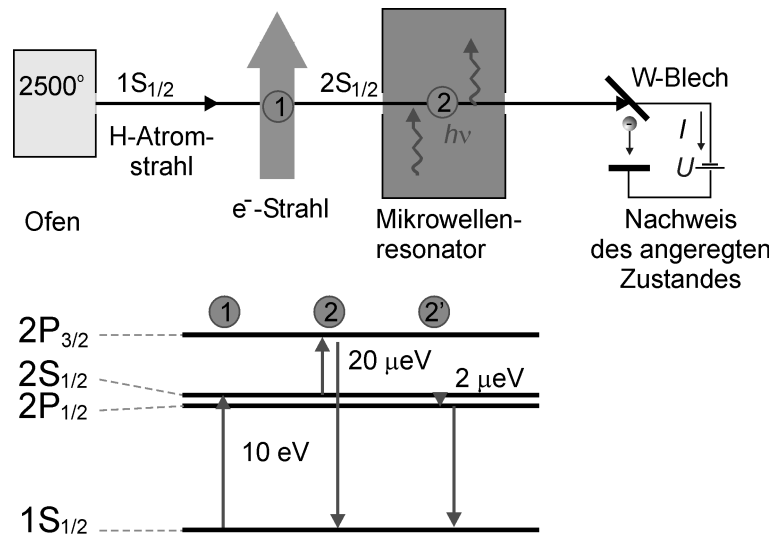


Abbildung 0.10: Messung der Lamb-Shift 1950. Nachweis des Lamb-Shift: H-Atomstrahl im Grundzustand wird durch Elektronen angeregt. Rückübergang ist wegen $\Delta l = 0$ verboten. Als Nachweis wird beim Auftreffen auf Wolframblech durch Anregungsenergie ein Elektron ausgelöst. Im Mikrowellenresonator wird je nach Frequenz Übergang nach $2P_{3/2}$ (10 GHz) oder $2P_{1/2}$ (1 GHz) induziert. Wegen $\Delta l = 1$ geht das H-Atom sofort in Grundzustand über, was durch eine Reduktion des Stromes I nachgewiesen wird.

0.8 Die Hyperfeinstruktur

Bei extremer Auflösung ist jede Feinstrukturkomponente aufgespalten. Es gilt:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$

Grund: Ausrichtung des Kernspins I im Magnetfeld der Elektronen.

Der Gesamtdrehimpuls des Atoms beträgt:

$$|\vec{F}| = |\vec{I}\vec{J}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar$$

mit $F = j+I, j+I-1, \dots, j-I$. Damit ist ein magnetisches Kernmoment verbunden:

$$\mu_I = g_I \mu_k I$$

mit dem Kernmagneton

$$\mu_k = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{J}{T}$$

Die aus der Wechselwirkung mit dem inneren Magnetfeld resultierende Energieaufspaltung ist:

$$\Delta E \cong g_k \mu_B \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1)}}$$

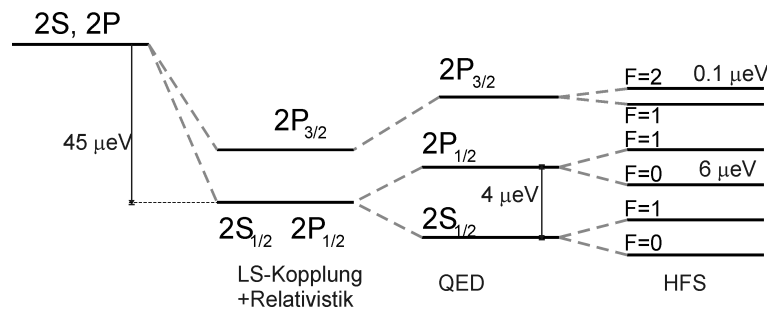


Abbildung 0.11: Hyperfeinstruktur

0.9 Welche Linien (Korrekturterme) können aufgelöst werden mit der vorliegenden Apperatur?

Massendefekt und Feinstruktur sind mit unserer Apperatur noch klar auflösbar, Lamb-Schift und Hyperfeinstruktur dagegen nicht. Die Aufspaltung der Energieniveaus der letzten beiden Korrekturen ist bereits so hoch (bei Hyperfeinstruktur 1000 mal geringer als bei Feinstruktur), das man bereits höchstauflösende Laserspektroskopie benötigt um sie aufzulösen. Bei Feinstruktur und Lambschift reichen zwar bereits konventionelle hochauflösende Spektroskope, wie wir auch im Versuch hatten, aber der Lambschift ist bereits so fein, dass er mit unserer Apperatur nicht mehr zu erkennen war. Der Grund dafür liegt vorallem darin, dass bei der Balmerserie die angeregten Elektronen auf das 2s bzw. 2p Niveau fallen und dort die Aufspaltung schon relativ komplex ist (vgl. Abbildung 0.11).

1 Praxis

1.1 Versuchsziel

Ziel ist es das Spektrum einer Wasserstoff-Deuterium-Lampe auszumessen. Aus den so gemessenen Wellenlängen der Wasserstofflinien soll die Rydbergkonstante berechnet werden. Aus der Linienaufspaltung der stärkeren Wasserstofflinien wird die Isotropieverschiebung und daraus die relative Atommasse von Deuterium bestimmt.

1.2 Zubehör

- (i) Wasserstoff-Deuterium-Lampe (Elektrodenlos, Gasentladungslampe mit Hochspannungsgerät)
- (ii) optische Schiene mit Halter und Kondensorlinsen
- (iii) Gitterspektrograph
- (iv) Photomultiplier
- (v) Halbdurchlässiger Spiegel
- (vi) Amperemeter mit Verstärker (Messbereich $10^{-12} - 10^{-3} A$)
- (vii) x-y Schreiber

1.3 Versuchstheorie

1.3.1 Versuchsaufbau

Der grundlegende Versuchsaufbau ist aus Abbildung 1.1 zu entnehmen. Über die Linsenordnung wird das Licht der Spektrallampe in den Gitterspektrographen eingekoppelt. In dem Gitterspektrographen kann durch drehen des Gitters der spektrale Bereich ausgewählt werden, der durch den Ausgangsspalt ausgekoppelt werden soll. Das Gitter kann dabei über einen Motor mit dem Getriebe oder von

1 Praxis

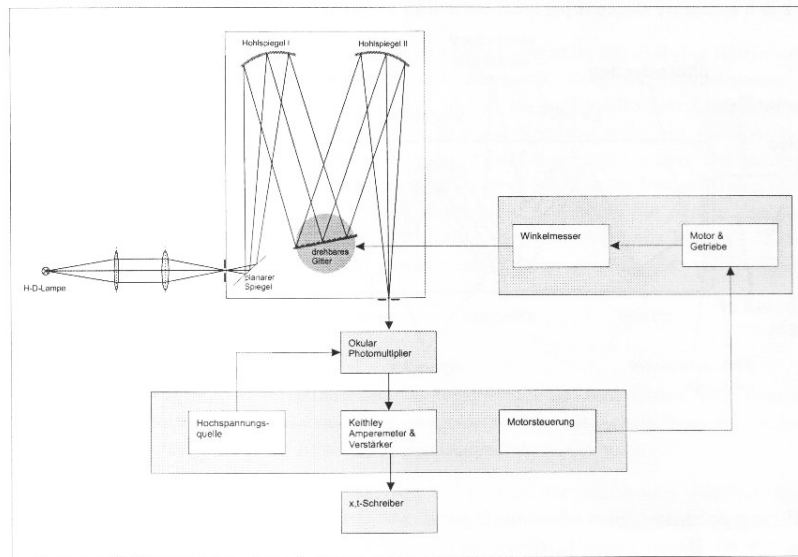


Abbildung 1.1: Skizze des Versuchsaufbaus

hand justiert werden. am Ausgangspalt besteht die Möglichkeit ein Okular für die visuelle Beobachtung auszusetzen. Weiterhin kann für die quantitative Analyse ein Photomultiplier (siehe 1.3.2) an den Ausgangspalt montiert werden, der an das Amperemeter angeschlossen wird. An dem Amperemeter ist ein x-y-Schreiber angeschlossen. Mit diesem können Spektren grafisch aufgenommen werden.

1.3.2 Photomultiplier

Photomultiplier sind spezielle Elektronenröhren um schwache Lichtsignale (bis hin zu einzelnen Photonen) zu verstärken und in ein elektrisches Signal umzuwandeln.

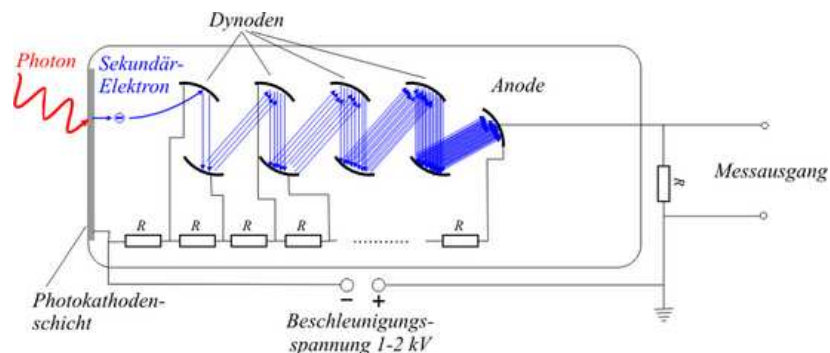


Abbildung 1.2: Skizze eines Photomultipliers

Ein Photomultiplier besteht aus einer Photokathode und einem nachgeschalteten Sekundärelektronenvervielfacher.

Funktionsweise

Die Photonen treffen auf die Photokathode und schieben so Elektronen aus deren Oberfläche. Die freigesetzten Photoelektronen werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und treffen auf weitere Elektroden, aus deren Oberfläche jedes auftreffende Elektron mehrere Sekundärelektronen herausschlägt ($n=3..10$). Somit nimmt die Anzahl der Elektronen kaskadenartig zu.

Anwendung

Anwendungen sind beispielsweise Detektoren für Elementarteilchen (z.B. Gamma-Spektrometer). Auch zur Messung schwacher Lichtsignale werden Photomultiplier eingesetzt.

1.4 Durchführung des Versuches

1.4.1 Justieren des Spektrographen

Die Lampe wurde zuerst so eingestellt, dass sie den Eintrittsspalt und das Gitter gut ausleuchtete. Dann wurde das Gitter so gedreht, dass man die H_α -Linie mit weit offenem Ausgangsspalt durch das Okular sehen konnte. Nun drehten wir den Eingangsspalt so weit zu, dass man die Linie scharf erkennen konnten. Bei genauem Hinsehen fiel auf, dass es zwei Linien waren (H_α und D_α) Nun nahmen wir das Okular ab und drehten Austrittsspalt so weit zu, bis man ohne Okular die beiden Linien voneinander unterscheiden konnte. Danach wurde auf den Austrittsspalt der Photomultiplier gesetzt.

1.4.2 Messung der Masse von Deuterium und dem Verhältnis Deuterium Wasserstoff

Um das Verhältnis von Deuterium und Wasserstoff zu bestimmen, suchten wir zuerst die Wasserstofflinien per Hand durch Drehung einer Walze, die das Gitter des Spektrographen drehte, wobei man den gedrehten Winkel an der Walze ablesen konnte. Nachdem die Linien H_α bis H_ϵ gefunden worden waren, ließen wir die Walze über ein Getriebe mit konstanter Geschwindigkeit ($\frac{0,01^{circ}}{min}$) laufen und zeichneten so mithilfe des Schreibers die jeweiligen Linien des Wasserstoffs und des Deuteriums auf. Dabei war darauf zu achten, dass die Sensitivität des Messgeräts so eingestellt war, dass wir einen möglichst großen Peak erhielten.

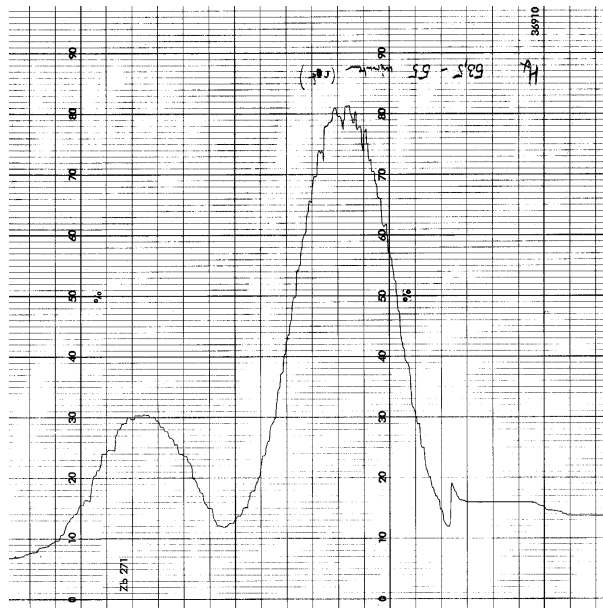


Abbildung 1.3: Typischer Peak der Messung des Wasserstoffspektrums

1.4.3 Bestimmung der Rydbergkonstanten

Um die Rydbergkonstante zu erhalten, zeichneten wir mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1^\circ}{min}$ das komplette Spektrum auf. Während der Messung musste wir die Sensitivität des Messgeräts immer wieder verändern, da wir neben den starken Wasserstofflinien auch die schwächer ausgeprägten Sauerstofflinien in unserem Spektrum erhalten wollten. Diese dienen uns in der Auswertung als Eichpunkte des Spektrums, da uns deren Wellenlängen bekannt waren.

2 Auswertung

2.1 Dispersionsrelation des Gitters

Messung der Sauerstofflinien	
Skala	Wellenlänge
in mm	in 10^{-9}m
0	391,195
23	394,733
57	407,435
228	436,817
490	494,297
513	496,873
647	533,022
926	592,495
1016	615,768
1150	645,607

Die Funktionsgleichung der Dispersionsgerade aus Abbildung 2.1 ist:

$$f(x) = 0,452 \cdot x - 1759,73$$

Dies ergibt für die Wasserstoffspektrallinien folgende Werte:

Messung der Wasserstofflinien		
Skala	Benennung	Wellenlänge
in mm		in 10^{-9}m
1199	H_α	121,8
442	H_β	156,0
216	H_γ	166,2
114	H_δ	170,8
48	H_ϵ	173,8

Dispersionskurve

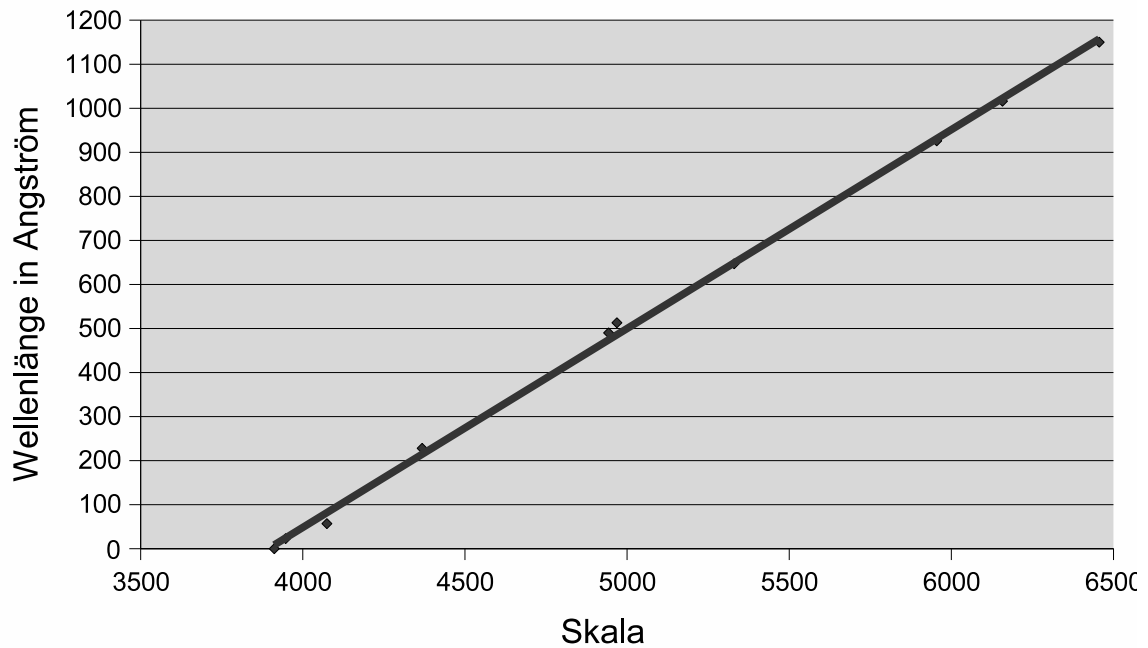


Abbildung 2.1: Dispersionsgerade

2.2 Analyse der Wasserstoff- und Deuteriumlinien

Aus den Wellenlängen der Wasserstofflinien können wir die Rydbergkonstante mit Hilfe folgender Formel bestimmen.

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Leftrightarrow R_H = \frac{(2^{-2} - n^{-2})}{\lambda}$$

Wir erhalten so zum Beispiel für die H_α folgenden Wert:

$$R_H = \frac{(2^{-2} - 1^{-2})}{656,28 \cdot 10^{-9}m} =$$

Die restlichen Werte sind in folgender Tabelle dargestellt.

2 Auswertung

Messung der Wasserstofflinien			
Bennung	Ordnung	Wellenlänge	Rydbergkonstant
		in 10^{-9}m	in m^{-1}
H_α	1		
H_β	3		
H_γ	2		
H_δ	4		
H_ϵ	5		

Wir erhalten also einen gemittelten Wert für die Rydbergkonstante von $R_H =$. Der Literaturwert beträgt $R_{H,Lit} = 1,09737 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$, dies ergibt also eine Abweichung in der Messung von %

2.3 Verhältnis Wasserstoff zu Deuterium

Wir erhalten folgende Werte für das Intensitätenverhältnis zwischen den Wasserstoff- und den Deuteriumlinien

Verhältnis zwischen den Wasserstoff und Deuterium			
Linie	H-Wert	D-Wert	H-Wert/D-Wert
α	13,7	4,3	3,18
β	16,2	5,7	2,84
γ	14,0	4,9	2,86
δ	11,45	3,8	3,01

Als Mittelwert erhalten wir ein Verhältnis von 2,97:1.

2.4 Masse von Deuterium und Masse des Neutron von Deuterium