

Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien
Wissenschaftliche Hausarbeit im Fach Physik

vorgelegt von

Dirk Winkel

AUFBAU EINES
DEMONSTRATIONSEXPERIMENTES
ZUR VERMESSUNG VON
CHLADNI-FIGUREN



Gutachter: Prof. Dr. H.-J. Stöckmann
Philipps-Universität Marburg

16. MAI 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	1
2	Historische Vorbemerkungen	2
3	Entwicklung und Aufbau des Experimentes	4
3.1	Anregung von Platten	4
3.1.1	Akustische Anregung	4
3.1.2	Mechanische Anregung	5
3.1.3	Magnetische Anregung	5
3.1.4	Wirbelstromanregung	7
3.1.5	Umsetzung im Experiment	8
3.2	Die Plattenaufhängung	11
3.3	Die richtige Platte	12
3.3.1	Materialeigenschaften	12
3.3.2	Stärke und Größe der Platten	14
3.4	Das richtige Granulat	15
3.5	Steuerung des Experimentes	16
3.6	Äußerer Aufbau	18
4	Theoretische Betrachtung schwingender Platten	20
4.1	Grundlagen	20
4.2	Randbedingungen	22
4.3	Die kreisrunde Platte	22
4.4	Die rechteckige Platte	23
4.5	Krummlinige Klangfiguren	25
5	Durchführung und Bewertung des Experimentes	26
5.1	Die kreisrunde Platte	26
5.2	Die rechteckige Platte	28
5.3	Krummlinig berandete Platten	29
6	Anwendungen	30
6.1	Das Beispiel der Musik	31
6.1.1	Musikalischer Wohlklang	31
6.1.2	Die Verteilung der Obertöne	34
6.1.3	Die zeitliche Veränderung des Spektrums	35
7	Zusammenfassung der Ergebnisse	38

Inhaltsverzeichnis

A	Bilder der Chladnifiguren	40
A.1	Die kreisrunde Platte	40
A.2	Die rechteckige Platte	43
A.3	Krummlinig berandete Platten	47

1 Zielsetzung

In der vorliegenden Arbeit wird ein experimenteller Aufbau entwickelt, mit dem Chladnifiguren erzeugt werden können. Ziel ist dabei ein relativ kleiner Aufbau, der sich auch zu Präsentationszwecken einsetzen lässt. Dabei soll die Handhabung des Experimentes möglichst einfach sein. Gleichzeitig soll das Experiment relativ einfach nachzubauen sein.

Nach einem kurzen historischen Überblick über die CHLADNischen Klangfiguren werden unterschiedliche Ansätze geprüft und diskutiert. Der geeignetste Aufbau wird daraufhin entsprechend den Anforderungen entwickelt und realisiert.

Die für die Plattenschwingungen relevanten theoretischen Grundlagen werden im Folgenden zusammenfassend dargestellt. Mit den Grundlagen ist die Berechnung der Plattenschwingungen für die vorliegenden Randbedingungen möglich.

Da das Experiment auch quantitative Aussagen über die Klangfiguren machen soll, werden die Figuren und die dazugehörigen Frequenzen vermessen. Die Ergebnisse werden mit den aus der Theorie der Plattenschwingungen ermittelten Werten verglichen. Damit wird die quantitative Aussagekraft des Experimentes ermittelt.

Abschließend befasst sich die Arbeit mit den Anwendungen der Plattenschwingungen. Exemplarisch wird dabei die Anwendung für Musikinstrumente näher betrachtet.

2 Historische Vorbemerkungen



Abbildung 2.1: Ernst Florens Friedrich Chladni, Quelle: Wikipedia.de (3.5.07)

Im Jahre 1787 veröffentlichte der Philosoph und Jurist ERNST FLORENS FRIEDRICH CHLADNI aus Wittenberg eine Arbeit mit dem Titel „Entdeckungen über die Theorie des Klanges“. Zum ersten Mal werden hierin Untersuchungen an schwingenden Platten beschrieben.

Er beobachtete, dass eine Glas- oder Metallplatte unterschiedliche Töne erzeugt, wenn man sie an verschiedenen Stellen anschlägt oder auch festhält. Dieses Phänomen wollte er näher untersuchen. Sein Vorgehen systematisierte er durch Anstreichen einer an einem Zapfen eingespannten Platte mit einem Violinenbogen. Er beobachtete, dass sich auf die Platte gestreuter Sand in definierte Linien ordnete, abhängig von der Fixierung der Platte sowie der Frequenz und dem Ort der Anregung.

2 Historische Vorbemerkungen

Als Privatgelehrter wurde seine Entdeckung bald zu seiner wichtigsten Einnahmequelle. Sein Geld verdiente der Sohn eines anerkannten Juristen nach dem Tod seines Vaters mit Gastvorlesungen. Die vielfältigen Muster, die er durch unterschiedliche Haltung seiner Platten und gezieltes Anstreichen mit dem Bogen erzeugen konnte, faszinierte sein teilweise sehr prominentes Publikum. Durch seine Reisen wurden die CHLADNischen Klangfiguren weltbekannt.

In seinem wichtigsten Werk, der „Akustik“, fügte er die bis dahin bestehenden Erkenntnisse zur Akustik zusammen und ergänzte sie durch weitreichende eigene Untersuchungen, welche sich neben den schwingenden Platten noch auf weitere Bereiche der Akustik bezogen[1]. Vor allem diesem grundlegenden und umfangreichen Werk verdankt er heute seine Anerkennung als „Vater der Akustik“.

Bereits 16 Jahre vor seinem Tode - er starb 1827 - wurde von der Pariser Akademie ein Preis von 3000 Franc auf eine zufriedenstellende mathematische Erklärung des Phänomens ausgesetzt. Nachdem sich die 1788 von JAKOB BERNOULLI aufgestellten Berechnungen als falsch erwiesen war es SOPHIE GERMAIN, welche die Plattenschwingungen von Rechteckplatten beschrieb. Auch wenn die Theorie von LAGRANGE ergänzt werden musste, erhielt GERMAIN 1815 den ausgeschriebenen Preis.

Auf der Basis von zwei Grundlösungen von NAVIER entwickelte POISSON 1829 die vollständige Theorie für Kreisplatten. Daraufhin gelang es G. R. KIRCHHOFF 1850 eine allgemeine Differentialgleichung vierter Ordnung mit zwei Randbedingungen aufzustellen, welche die Plattenschwingungen allgemein beschreibt. Am Plattenrand verschwinden dabei die zweite und die dritte Ordnung der Differentialgleichung. Auch wenn es KIRCHHOFF gelang die Gleichung für Kreisplatten zu lösen, konnte erst W. RITZ 1908 eine allgemeine Näherungslösung für quadratische Platten liefern. E. GOLDMANN und B. PAVLIK entwickelten 1937 eine allgemeine Lösung für Rechteckplatten. [5][4]

Bis zum heutigen Tag ist es nicht möglich gewesen, eine allgemeine Lösung für krummlinig berandete Platten zu finden.

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

3.1 Anregung von Platten

Chladni strich seine Platten mit einem Geigenbogen an. An dem Punkt, wo er die Platte anstrich, konnte sich demnach kein Schwingungsknoten befinden. Idealerweise wäre hier ein Schwingungsbauch. Darüber hinaus hielt er die Platte an gezielten Punkten zwischen zwei Fingern und gab somit einen Knotenpunkt vor. Anhand dieser Randbedingungen bildete sich auf der Platte eine stehende Welle mit einer bestimmten Frequenz, die durch das Anstreichen hervorgerufen wurde. Die tatsächliche Frequenz war dabei für ihn von geringerem Interesse als das Muster der Knotenlinien.

3.1.1 Akustische Anregung

Bei einem Großteil der heute durchgeführten Experimente zu Chladnischen Klangfiguren findet sich ein anderer Aufbau. Inzwischen werden unterschiedlich eingespannte Platten in der Regel durch einen Lautsprecher, also akustisch, angeregt. Die longitudinale Druckwelle vorgegebener Frequenz verformt dabei die Platte. Diese Verformung breitet sich wellenförmig auf der Platte aus und wird an ihren Rändern reflektiert. Dies führt zur Schwingung der gesamten Platte. Wird eine Eigenfrequenz der Platte getroffen, erhöht sich die Amplitude der Eigenschwingung solange bis die innere Eigendämpfung des Plattenmaterials, bedingt durch inelastische Verformung, ebenso stark ist wie die Energiezufuhr durch den Schalldruck.

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

Die übliche Verstärker- und Lautsprecherleistung liegt bei dieser Anordnung etwa bei 15W (Sinus)[5]. Der einfache Aufbau und die allgemeine Verfügbarkeit der Materialien machen dieses Verfahren zu der am häufigsten angewendeten Methode. Vor allem die starke Lärmentwicklung, insbesondere bei etwas höheren Frequenzen, ist bei diesem Aufbau jedoch störend. Des Weiteren ist es nicht möglich mit einem Lautsprecher eine annähernd punktförmige Anregung zu realisieren. Da bei sehr hohen Frequenzen die Knotenlinien eng beieinander liegen, ist eine akustische Anregung im hochfrequenten Bereich nicht mehr möglich.

3.1.2 Mechanische Anregung

Eine alternative Anregungsmethode ist die direkte mechanische Anregung. Dabei wird die Platte fest auf einen oszillierenden Stab geschraubt. Dies ermöglicht eine sehr gute Kopplung von Oszillator und Platte und damit eine geringe Anregungsleistung. Da die Anregung nahezu punktförmig erfolgt, sind recht hohe Anregungsfrequenzen möglich. Aufgrund dessen wird gerade bei neueren Aufbauten häufig dieses Verfahren angewandt. Als Kit ist es bereits kommerziell erhältlich (z.B. von PASCO).

Nachteilig ist die fest vordefinierte Einspannung in der Plattenmitte. Dadurch sind nur die Resonanzen möglich, die hier einen Schwingungsbauch haben.

3.1.3 Magnetische Anregung

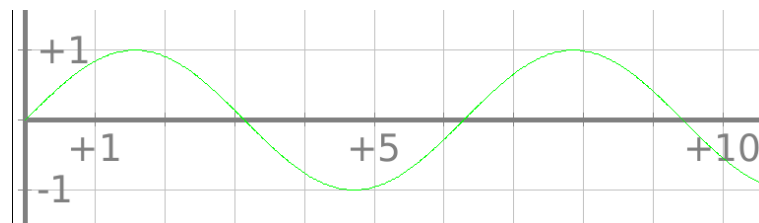


Abbildung 3.1: Normale Magnetische Anregung

Wird eine magnetisierbare Platte, zum Beispiel aus Stahl, verwendet, so kann diese durch einen Elektromagneten angeregt werden. Bei einem Wechselstrom va-

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

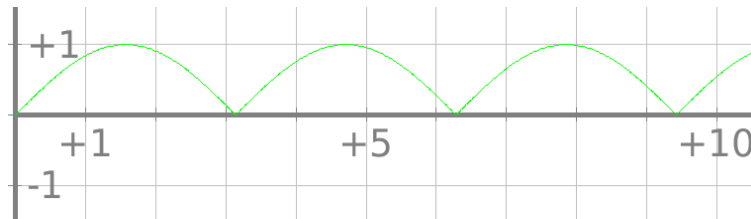


Abbildung 3.2: Kraft auf die Platte

riert die Feldstärke dabei sinusförmig. Da die Kraft auf die magnetische Platte jedoch lediglich vom Betrag des Feldes abhängt und nicht von der Richtung, wird die Platte mit dem Betrag des Sinus angeregt. Dieses Problem ist durch eine Vormagnetisierung des Spulenkerns zu beheben. Dabei muss der Spulenkern mindestens so stark vormagnetisiert sein wie das maximale Wechselfeld, so dass das resultierende Feld immer die gleiche Richtung hat. Dies kann durch das Anheften eines Permanentmagneten an den Spulenkern des Elektromagneten geschehen.

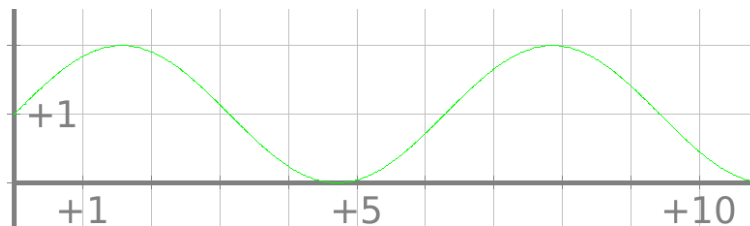


Abbildung 3.3: Magnetische Anregung bei optimaler Vormagnetisierung

Da das äußere Spulenfeld inhomogen ist und mit zunehmender Entfernung vom Kern stark abnimmt, sollte der Spalt zwischen Platte und Spulenkern möglichst klein sein. Als Folge der Vormagnetisierung wird die Platte immer angezogen, lediglich mit wechselnder Kraft. Dadurch heftet sich die Platte bei zu geringem Abstand magnetisch an den Spulenkern. Es ist dadurch sehr schwierig den richtigen Abstand einzustellen.

Reduzieren lässt sich dieses Problem, indem ein Stück Filz als Abstandhalter auf den Spulenkern geklebt wird. Dieser dämpft bei geringem Kontakt die Platte kaum und sorgt dafür, dass die Platte sich nicht an den Kern anheftet.

3.1.4 Wirbelstromanregung

Anstelle der magnetischen Anregung ist für nichtmagnetisierbare, leitende Platten eine Wirbelstromanregung möglich. Hierbei wird eine Spule unter der anzuregenden Platte positioniert. Wird die Spule von einem Wechselstrom durchflossen, so induziert das magnetische Wechselfeld einen Wirbelstrom in der Platte. Dies induziert seinerseits ein entgegengerichtetes Magnetfeld, wodurch eine Kraft auf die Platte ausgeübt wird.

Die alleinige Anregung durch den Wirbelstrom ist sehr gering. Eine Verstärkung kann durch eine nahezu beliebige Vormagnetisierung des Spulenkerns erreicht werden. Folglich steht das durch den Wirbelstrom induzierte schwache Magnetfeld einem starken konstanten Magnetfeld gegenüber, was zu einer deutlich stärkeren Kraft führt (3.4). Je stärker der Spulenkern vormagnetisiert ist desto stärker ist also die Anregung bei gleichem Spulenstrom. Die Grenze markiert die magnetische Sättigung des Spulenkerns.

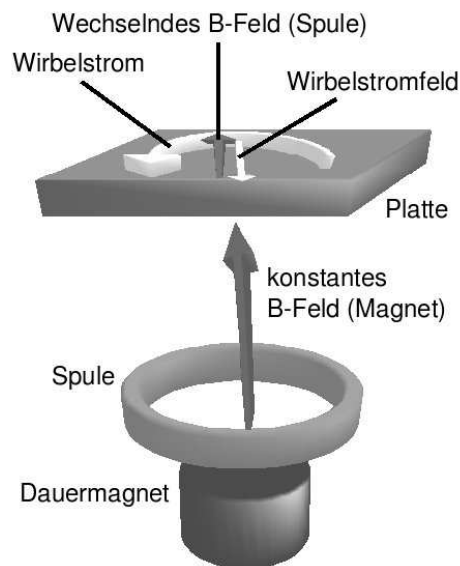


Abbildung 3.4: schematische Darstellung der Wirbelstromanregung

Die Kraft, die auf die Platte wirkt, ist nicht exakt sinusförmig. Bei der Platenauslenkung zur Spule hin ist sie, durch das inhomogene Magnetfeld der Spule, etwas größer als bei der Auslenkung von der Spule weg. Sollte man eine FOURIERanalyse einer solchen Anregung durchführen würde man erkennen, dass ne-

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

ben der Hauptfrequenz noch Nebenfrequenzen bei der Anregung auftreten. Dieser Effekt hat aber im Experiment keinen störenden Einfluss. Da die Plattenschwingungen eine sehr geringe Amplitude haben, kann offenbar das Feld als annähernd homogen angenommen werden.

Einziger Nachteil der Wirbelstromanregung ist die Beschränkung auf leitende Platten. Durchsichtige Glasplatten, die auf einem Overheadprojektor zu Demonstrationszwecken eingesetzt werden könnten, lassen sich somit nicht anregen.

Sowohl die magnetische als auch die Wirbelstromanregung erlauben einen kleinflächigen Anregungsbereich an jeder beliebigen Stelle der Platte. Die Platte lässt sich also auch mit hohen Frequenzen anregen. Im Experiment zeigt sich, dass bei höheren Frequenzen lediglich eine höhere Anregungsleistung notwendig ist.

Die Aufhängung der Platte ist bei magnetischer und Wirbelstromanregung frei wählbar.

3.1.5 Umsetzung im Experiment

Aufgrund der oben genannten Vorteile der Wirbelstromanregung wurde diese für den experimentellen Aufbau gewählt. Da die magnetische Anregung aber nahezu identisch funktioniert, könnte der Aufbau auch zur magnetischen Anregung verwendet werden. Lediglich der Magnet zur Vormagnetisierung müsste durch einen deutlich schwächeren ersetzt werden.

Auswahl der Spule

Die optimale Spule sollte ein maximales Magnetfeld bei geringer Leistungsaufnahme erzeugen. Dazu muss sie im Frequenzbereich von $200 - 5000\text{Hz}$ betrieben werden können.

Der Wechselstromwiderstand einer Spule berechnet sich durch

$$\frac{U}{I} = \omega L \quad (3.1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Spannung ist und die Induktivität L gegeben ist

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

durch

$$L = N^2 \mu_0 \mu_r \frac{A}{l}$$

Hierbei stellt N die Windungszahl dar, $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ die magnetische Feldkonstante, μ_r die magnetische Permeabilität des Kerns der Spule, A die Querschnittsfläche des Kerns und l die Spulenlänge.

Die magnetische Flussdichte ist gegeben durch

$$B = \mu_0 \mu_r I \frac{N}{l}$$

wobei I der fließende Strom ist.

Für den zu maximierenden magnetischen Fluss gilt

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot A$$

da A eine ebene Fläche ist und $\vec{B} \perp \vec{A}$.

Die direkt beeinflussbaren Parameter sind die Spannung U , die Windungszahl N und die Abmessungen der Spule A und l . Mit (3.1) folgt für den magnetischen Fluss

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{U}{\omega L} \frac{N}{L} A = \mu_0 \mu_r \frac{U \cdot l}{\omega N^2 \mu_0 \mu_r A} \frac{N}{l} A = \frac{U}{2\pi f N}$$

Optimal ist also eine hohe Spannung und eine geringe Windungszahl, die Abmessungen der Spule sind dabei irrelevant. Bei geringen Induktivitäten ist der Wechselstromwiderstand gering und der Strom somit hoch. Dies führt zu großen Feldstärken. Des Weiteren steigt der Strom und somit auch die Feldstärke ebenfalls proportional zu der angelegten Spannung an.

Hohe Frequenzen erhöhen den Wechselstromwiderstand und führen so bei konstanter Spannung zu geringer werdenden Feldstärken. Eine Erhöhung der Spannung mit der Frequenz ist also notwendig.

Zur Ermittlung der nötigen Feldstärke wurde eine handelsübliche Relaisspule unter kurzzeitiger starker Überlastung getestet. Bei ausreichender Anregung der Platten wurde die Spannung und die dazugehörige Frequenz ermittelt. Mit Hilfe der gemessenen Induktivität wurde die Flussdichte zu $0,38mT$ ermittelt. Der Kerndurchmesser der Spule betrug $4mm$.

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

Die im Experiment verwendete Spule hat eine Induktivität von etwa $1,6mH$. Um bei minimaler Windungszahl den für den Verstärker nötigen Wechselstromwiderstand (siehe unten) zu erreichen, und um die Vormagnetisierung für die Wirbelstromanregung zu realisieren, wurde ein Kern verwendet. Da die magnetischen Permeabilitäten von Eisen um mehr als eine Größenordnung schwanken und Hersteller beinahe nie Angaben über die Permeabilitäten machen, wurde der Kern einer Relaispule verwendet. Der Kerndurchmesser beträgt $6mm$. Ein noch größerer Kerndurchmesser würde zwar den Wechselstromwiderstand erhöhen, aber auch die Anregungsfläche vergrößern. Die Spulenlänge beträgt dabei $25mm$. Um bei dem hohen Strom die Verluste durch den elektrischen Widerstand gering zu halten und auch die Spule nicht zu überhitzen, ist ein Drahtdurchmesser von $1mm$ notwendig. Die Windungszahl beträgt ungefähr 210.

Auswahl des Verstärkers

Die notwendige kleinstmögliche Windungszahl der Spule bedingt einen minimalen Wechselstromwiderstand und somit quasi einen Kurzschluss. Nötig ist also ein Verstärker, welcher im Frequenzbereich von etwa $200Hz$ bis $5000Hz$ bei geringem Außenwiderstand die Spannung noch stabil hält.

Ein Audioverstärker ist genau für diesen Einsatz optimiert. Moderne Lautsprecherboxen haben Wechselstromwiderstände bis zu minimal 4Ω . Im Gegensatz zu einer Spule haben diese aber einen relativ frequenzunabhängigen elektrischen Widerstand. Ein Audioverstärker muss also bei höheren Frequenzen entsprechend nachgeregelt werden. Da die Signalerzeugung über die Soundkarte eines PC erfolgt, kann dies durch eine frequenzabhängige Anhebung der Amplitude, mit Hilfe der Steuerungssoftware des Experimentes geschehen.

Die Spule wurde so ausgelegt, dass sie bei $200Hz$ einen Widerstand von etwa 2Ω besitzt. Da Audioverstärker mittlerweile mit selbstrückstellenden Sicherungen ausgerüstet sind und die Spule aus oben genannten Gründen bei der Frequenz ohnehin nur bei geringer Verstärkerleistung betrieben wird, kann mit so geringem Widerstand gearbeitet werden. Aus diesem Grund sind bei der Verstärkerleistung

für die hohen Frequenzen noch entsprechende Reserven vorhanden.

Im Experiment erwies sich ein kleiner Audioverstärker mit 2x15W Sinusleistung als ausreichend. Um die frequenzabhängige Amplitudenregelung zu realisieren wurde eine Messreihe aufgenommen, die bei einer angeschlossenen Spule die Belastbarkeit des Verstärkers in Abhängigkeit der Frequenz ermittelt. Die Messreihe wurde mit einem Polynom zweiten Grades angenähert. Daraus ermittelt die Steuerungssoftware die maximal mögliche Amplitude um die Verstärkerleistung vollständig auszunutzen.

Die Auslegung erreicht akzeptable Ergebnisse bis 5000Hz . Bei einem deutlich leistungsfähigeren Verstärker und einer entsprechend ausgelegten Spule wären noch deutlich höhere Frequenzen realisierbar. Jedoch widerspricht dies der Zielsetzung eines kleinen und portablen Versuchsaufbaus.

3.2 Die Plattenaufhängung

Die Aufhängung der Platte ist von grundlegender Bedeutung für die Ausbildung von Klangfiguren. So ist durch eine starre Aufhängung bereits ein Knotenpunkt als Randbedingung vorgegeben, welcher meistens in der Mitte gewählt wird. Eine zusätzliche Randbedingung bei einer festen Verschraubung ist, dass die Platte in der Aufhängung waagrecht bleibt, was mathematisch betrachtet nur in einem Schwingungsbauch (1. Ableitung = 0) vorkommt. Im Experiment verlaufen aber Knotenlinien immer durch den Aufhängungspunkt. Dieser zusätzlichen Randbedingung scheint somit durch lokale Verformungen der Platte entsprochen zu werden.

Eine Ausnahme bilden mechanisch angeregte Aufbauten, bei denen die mechanische Anregung gleichzeitig als Aufhängung für die Platte dient. Hier ist die Randbedingung vorgegeben, dass der Aufhängungspunkt einen Schwingungsbauch darstellen muss. Das durchgeführte Experiment bestätigte dies.

Optimal wäre eine Aufhängung, die keine zusätzliche Randbedingung darstellt, also die Platte nicht beeinflusst. Dazu müssen die Kräfte, die durch das Schwingen auf die Platte wirken, deutlich kleiner sein als jene, welche die Platte zum Schwin-

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

gen anregen. Ein Schweben auf einem Luftkissen stellte eine solche Möglichkeit dar, jedoch ist dies technisch recht aufwendig.

Eine Alternative stellt die Auflage auf weiche Spiralfedern dar. Hier wirken in Ruhe nur geringe Kräfte, um das Gewicht der Platte zu tragen. Diese sind jedoch konstant und beeinflussen somit die Schwingung nicht. Während die Platte schwingt werden die Spiralfedern mit der Schwingung der Platte gestreckt und verkürzt. Durch die sehr kleine Amplitude der Schwingung sind die dadurch entstehenden zusätzlichen Kräfte bei weichen Stahlfedern sehr gering und fallen ebenfalls nicht ins Gewicht. Auch die zusätzlich zu beschleunigende Masse hat bei leichten Federn keinen signifikanten Einfluss. Somit kann die Platte als frei betrachtet werden.

Vergleichbare Bedingungen sind durch die Aufhängung an weichen Gummibändern zu erreichen. Diese Umsetzung stellte sich allerdings als aufwendiger heraus.

Im Experiment finden weiche Kugelschreiberfedern ihre Anwendung. Bei unterschiedlicher Positionierung der Federn ist kein Einfluss auf die Platte zu erkennen. Die Eigenschwingung des Platte-Feder-Systems befindet sich im Bereich von wenigen Hz, eine Beeinflussung ist also auch hier auszuschließen. Um ein Abknicken der Federn zu vermeiden sind diese in einen Holzständer eingelassen.

3.3 Die richtige Platte

Die Form der Platte entscheidet über die möglichen Klangfiguren, die darauf erzeugt werden können. Darüberhinaus sind auch die Materialeigenschaften und die Stärke der Platte von entscheidender Bedeutung.

3.3.1 Materialeigenschaften

Unterschiedliche Plattenmaterialien wurden bei gleicher äußerer Abmessung (140 x 210 x 0,7mm) im Experiment getestet. Dabei wurden ausschließlich isotrope Platten verwendet, die in jede Richtung die gleichen Elastizitätseigenschaften haben. Orthotrope Platten, beispielsweise aus gewalztem Blech, haben, aufgrund eines

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

unterschiedlichen Elastizitätsmoduls in unterschiedlicher Richtung, richtungsabhängige Wellengeschwindigkeiten. Die Beurteilung einer Klangfigur wird dadurch schwieriger.

Die getesteten Materialien sind Stahl (bei magnetischer Anregung), Aluminium, Kupfer und drei verschiedene Bronzelegierungen mit unterschiedlichem Zinngehalt, die freundlicherweise durch die Wieland-Werke AG bereitgestellt wurden. Bronze wird häufig im Instrumentenbau und für Glocken verwendet. Es zeichnet sich durch eine sehr geringe Eigendämpfung aus.

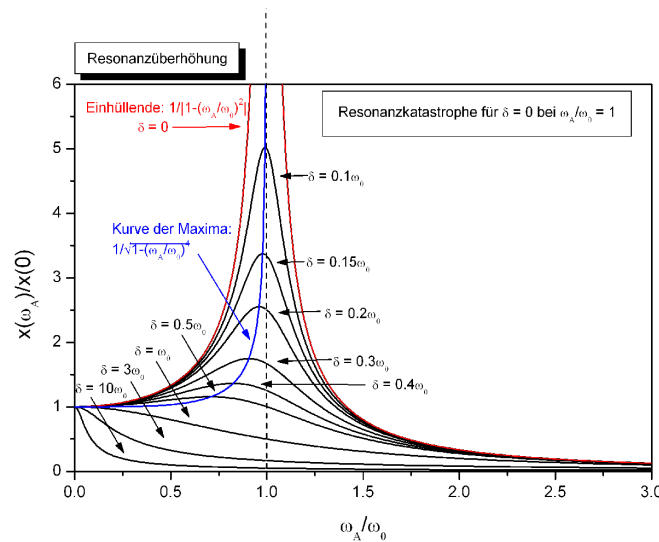


Abbildung 3.5: Resonanzen bei unterschiedlichen Eigendämpfungen des schwingenden Systems

Um die Dämpfungseigenschaften der Platten zu ermitteln, wurden sie an unterschiedlichen Stellen angeschlagen und die Schwingungsfrequenzen gemessen. Im Versuch zeigten sich die Stahlplatte und die Aluminiumplatte ähnlich geeignet. Aufgrund oben genannter Nachteile der magnetischen Anregung wurde diese jedoch verworfen. Die Bronzeplatten dagegen zeigten ein deutlich anderes Verhalten als die Aluminiumplatte. Während die Aluminiumplatte nach einem kurzen, dumpfen Ton nur noch mit der Grundfrequenz von $108,5\text{ Hz}$ klang und auch diese stark gedämpft wurde, war bei den Bronzeplatten noch über einige Sekunden ein jeweils eindeutiges Spektrum messbar. Dieses veränderte sich nur langsam durch die

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

unterschiedliche Dämpfung der verschiedenen Frequenzen.

Der Versuch zeigt eine starke Dämpfung von Aluminium und eine deutlich schwächere von Bronze auf. Die geringe Dämpfung spiegelt sich in einer sehr hohen Schwingungsamplitude bei der Anregung mit einer Resonanzfrequenz wider. Bei einer nur geringfügig abweichenden Anregungsfrequenz tritt mit der Zeit eine Phasenverschiebung zwischen schwingender Platte und Anregung auf. Eine Gegenphase dämpft aktiv die Schwingung der Platte. Damit wird bei der Abweichung die Resonanz unterbunden. Der Resonanzbereich ist also sehr schmal. Die Halbwertsbreiten der Resonanzspitzen bei den Bronzeplatten sind kleiner als $1Hz$.

Die Resonanzen der Aluminiumplatte sind durch einen Frequenzsweep sehr viel schneller aufzufinden, da Aluminium eine vielfach höhere Eigendämpfung besitzt und damit flachere, aber breitere Resonanzspitzen. Dabei reicht die Wirbelstromanregung trotzdem problemlos aus um die Klangfiguren zu erzeugen. Die gute elektrische Leitfähigkeit von Aluminium sorgt dabei für eine relativ gute Kopplung.

Aluminium eignet sich also gut für die Wirbelstromanregung. Bei der Berechnung der Resonanzen ist jedoch die durch die Dämpfung auftretende Resonanzverschiebung zu geringeren Frequenzen zu beachten.

3.3.2 Stärke und Größe der Platten

Es wurden Aluminiumplatten unterschiedlicher Stärke und Größe getestet. Dabei stellte sich heraus, dass eine größere Platte kaum schlechter ist für die Klangfiguren als eine kleinere. Die Stärke der Platten hatte jedoch einen frequenzabhängigen Einfluß auf die Bildung von Chladnifiguren. Die Stärken der getesteten Platten betrug $1,5mm$, $1mm$, $0,75mm$ sowie Aluminiumfolie von $10\mu m$. Dabei hatte die dickere Platte bei geringen Frequenzen einen leichten Vorteil. Bei der dünnsten Platte bildeten sich bei hohen Frequenzen die Chladnifiguren jedoch deutlich schneller. Eine noch dünnere Platte hätte allerdings eine zu geringe Steifigkeit. Bei größeren Platten erwies sich eine Stärke von $0,75mm$ als optimal, bei kleineren Platten reicht die Steifigkeit auch bei geringerer Stärke aus. Jedoch „klappert“ eine Platte, wenn sie zu leicht ist bei hohen Amplituden. Dazu müssten die Spiralfedern durch

noch weichere ersetzt werden. Um dies zu ermöglichen sind die Federn magnetisch in den Stativen festgehalten.

Aluminiumfolie ließ sich mit der verwendeten Leistung praktisch nicht anregen. Eine Realisierung von Membranen mit Aluminiumfolie oder aluminiumbeschichteter Kunststoffolie würde folglich eine erheblich höhere Anregungsleistung erfordern.

3.4 Das richtige Granulat

Das Granulat, mit dem die Figuren erzeugt werden sollen, muss durch die Plattenschwingung von den Schwingungsbäuchen verdrängt werden. Es wurden unterschiedliche Materialien getestet.

Elektrostatisch aufladbare oder durch Luftfeuchtigkeit klumpende Materialien haften an der Platte und sind somit zu meiden.

Leichte Materialien wie Gewürze hatten keinen Vorteil gegenüber schwereren wie Zucker oder Sand. Offenbar ist die Beschleunigung ausschlaggebend, welche die Platte auf das Granulat ausübt. Diese ist annähernd unabhängig von der Masse.

Sand bewegt sich schon bei etwa der halben Amplitude im Vergleich zu den meisten anderen Materialien wie Zucker oder Pfeffer. Die Korngröße spielt dabei keine Rolle. Keines der Materialien haftete an der Platte wie durch das Schrägstellen derselben leicht zu prüfen ist. Die mikroskopische Betrachtung zeigt, dass die verwendeten Sandkörner, im Gegensatz zu den anderen verwendeten Materialien, annähernd rund sind. Die Plattenbewegung ermöglicht durch die Bewegungen ein Aufschaukeln der Körner, auch wenn die Beschleunigung durch die Platte noch deutlich unter der Erdbeschleunigung liegt. Die flacheren Körner der anderen Materialien bleiben dagegen so lange stabil liegen bis sie durch die Beschleunigung von der Platte abheben.

Das annähernd runde Carrom-Pulver, welches als Gleitmittel bei dem Brettspiel „Queen Carrom“ eingesetzt wird, bewegt sich wie der Sand bereits bei geringeren Amplituden. Die Bewegung ist jedoch sehr langsam. Der Durchmesser der Partikel

beträgt lediglich $\leq 40\mu\text{m}$. Dies führt dazu, dass nicht die übliche Bewegungsrichtung zu den Knotenlinien überwiegt, sondern die Partikel durch Luftströmungen auf der Plattenoberfläche in die Nähe der Schwingungsbäuche transportiert werden [7].

Folglich scheint CHLADNI mit Sand eine optimale Wahl getroffen zu haben. In der Literatur findet sich gelegentlich die Verwendung von Trockeneis (vor allem durch MARY D. WALLER). Aufgrund der aufwändigen Beschaffung und der geringen Haltbarkeit fiel für das Experiment die Wahl jedoch auf Sand. Dieser ist gefärbt in Fachgeschäften für Bastlerbedarf erhältlich, wobei durch die Farbe der nötige Kontrast zur Platte ebenfalls gegeben ist.

3.5 Steuerung des Experimentes

Der Frequenzbereich, in dem die Klangfiguren zu beobachten sind, ist vollständig im akustischen Bereich. Da für die Versorgung der Spule ein handelsüblicher Audioverstärker verwendet werden kann, bietet es sich an, das Signal über eine PC-Soundkarte zu erzeugen, über die heute fast jeder PC verfügt.

Zur Messung der Plattenschwingung gibt es die Möglichkeit einer kapazitiven Messung. Wird eine kleine Leiterplatte in geringem Abstand unter einen Schwingungsbauch gehalten, so stellt dieses System einen Plattenkondensator dar. Anhand der messbaren Kapazität (3.6) läßt sich der Abstand quantitativ ermitteln. Durch die Schwingung der Platte ändert sich die Kapazität des Plattenkondensators und die Schwingung kann somit quantitativ vermessen werden.

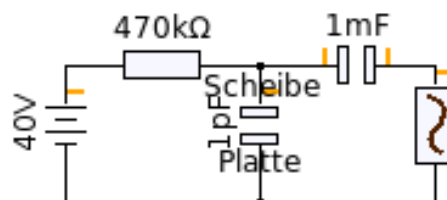


Abbildung 3.6: Kapazitive Messung der Plattenauslenkung

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

Für das Experiment ist die tatsächliche quantitative Auslenkung jedoch weniger entscheidend. Interessant ist vielmehr die Schwingungsfrequenz. Diese kann deutlich einfacher mit einem Mikrofon gemessen werden, da die schwingende Platte Schallwellen abstrahlt. Dieses akustische Signal kann ebenfalls mit einem PC aufgenommen und analysiert werden.

Zur Steuerung des Experimentes wurde eine Software entwickelt, welche zum einen ein Sinussignal erzeugt und zum anderen ein eingehendes Mikrofonsignal aufnimmt und analysiert.

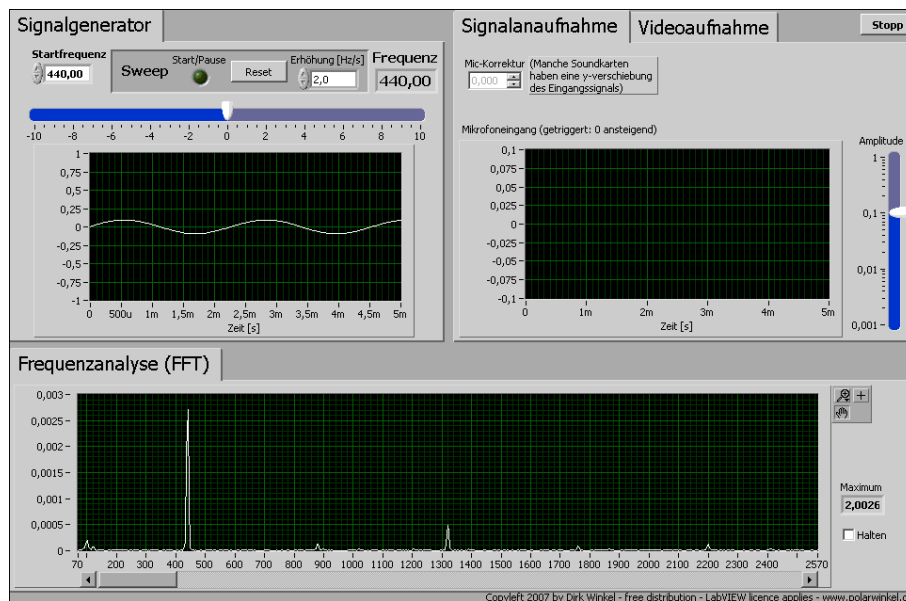


Abbildung 3.7: Bedienungsfläche der Steuerungssoftware

Der Signalgenerator verfügt über einen Sweep, also einen automatischen Frequenzdurchlauf. Mit dem Sweep kann der gesamte Frequenzbereich durchlaufen werden, um alle Resonanzen bei dem vorgegebenen Anregungsort aufzuspüren.

Das aufgenommene Mikrofonsignal kann direkt graphisch dargestellt und mit dem Ausgangssignal verglichen werden. Darüberhinaus wird das Signal FOURIER-transformiert. Auf diese Weise können die einzelnen Frequenzen, aus denen die Schwingung zusammengesetzt ist, mit ihrer Intensität dargestellt werden. Angezeigt wird dies in einem weiteren Graphen.

Um das Experiment auch zu Demonstrationszwecken im größeren Rahmen verwenden zu können, wurde in die Software eine Möglichkeit integriert, mit einer

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

handelsüblichen Webcam ein Livebild darzustellen. Somit können in einem Klassenzimmer oder Hörsaal per Beamer das Ausgangssignal, das Eingangssignal, die Frequenzanalyse der Plattenschwingung und die Klangfigur selbst in Echtzeit dargestellt werden.

Die Software wurde darauf optimiert, dass es ohne lange Eingewöhnung möglich ist, das Experiment zu steuern. Dennoch sind alle wichtigen Einstellmöglichkeiten vorhanden.

Eine Vermessung der Klangfigur ist über die Videoaufzeichnung nicht möglich, da Webcams das Bild teilweise sehr stark verzerren. Der Kalibrierungsaufwand dafür wäre unverhältnismäßig hoch. Die Aufzeichnung eines Koordinatensystems direkt auf die Oberfläche der Platte oder die manuelle Vermessung stellt die bessere Möglichkeit dar die Figuren zu vermessen.

3.6 Äußerer Aufbau



Abbildung 3.8: Der experimentelle Aufbau im Betriebszustand

Das Experiment ist zur Geräuschdämmung in einer dafür angefertigten Buchenholzbox untergebracht. Auf dem Boden wurde eine Stahlplatte eingesetzt. Auf

3 Entwicklung und Aufbau des Experimentes

dieser sind die Stative für die Federaufhängung, die Spule, sowie das Mikrofon zur Signalaufnahme mit Hilfe von Magnetfüßen frei platzierbar. Die Magnetfüße gewährleisten einen festen Stand. Teppichboden an den Wänden der Kiste sorgt für eine zusätzliche Geräuschkämmung.

Die Spule wird auf einem Stativ aus Messing platziert, welches durch ein Gewinde höhenverstellbar ist. Gehalten wird sie durch den eingefassten starken Dauermagnet, der zugleich zur Vormagnetisierung dient. Auf diese Weise bleibt die Spule drehbar und das Stativ kann hochgeschraubt werden, ohne dass sich die Kabel dabei aufwickeln.

Wenn die Platte leicht schräg liegt, rutscht der Sand bei der Anregung nach unten. Daher wurden, um das Experiment waagrecht platzieren zu können, drei Gewinde in den Boden eingelassen. Schrauben, auf denen das Experiment steht, können so zur Justierung ein- oder ausgedreht werden. Zur Kontrolle dient eine Dosenlibelle.

Die vordere Wand der Kiste ist herausnehmbar. Damit kann ohne Unterbrechung des Experimentes die Spule und das Mikrofon verrückt werden um es unter einem Schwingungsbauch zu platzieren. Darüber hinaus wurden Kabeldurchführungen in die Seite der Kiste eingeklebt.

In den Deckel ist eine durchsichtige Kunststoffscheibe eingefasst durch welche die Klangfiguren betrachtet werden können. Der Griff dient nicht nur zum Transport, sondern zugleich als Halterung für einen Stab, auf dem eine leichte WebCam festgeklammert werden kann. Durch die seitliche Befestigung des Stabes kann der Deckel trotz der montierten Kamera geöffnet werden.

Wenn das Experiment platzsparend transportiert werden soll kann die auf dem Boden durch Magnete gehaltene Stahlplatte herausgenommen werden. Dann müssen lediglich die Platten selbst, die Stahl-Grundplatte, sowie die Stative, die Spule, das Mikrofon und der Verstärker transportiert werden. Das dadurch erheblich reduzierte Transportvolumen weist lediglich die Nachteile auf, dass die Schalldämmung, sowie das Auffangen des herunterfallenden Sandes nicht mehr gegeben sind.

4 Theoretische Betrachtung schwingender Platten

Die mathematische Beschreibung von schwingenden Platten stellt seit der Entdeckung der Klangfiguren ein ungelöstes Problem dar. Nach über 150 Jahren der Forschung wurden einige Lösungen zu Spezialfällen gefunden, jedoch sind Plattenschwingungen nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung.

Eine geschlossene Herleitung der Lösungen für die Kreisplatte und die Rechteckplatte ist im Rahmen dieser Arbeit sicherlich nicht möglich. Stattdessen sollen die grundsätzlichen Problemstellungen diskutiert und die Lösungen kurz vorgestellt werden. Für eine zusammenfassende Herleitung der theoretischen Erkenntnisse zu den Chladnifiguren sei auf das Buch „Eigenschwingungen von Platten und Schalen“ von W. S. GONTKEWITSCH [8] verwiesen.

4.1 Grundlagen

Platten stellen elastische, feste Körper dar, deren Dicke h klein gegenüber ihren anderen beiden Ausdehnungen a und b ist. Dabei ist die *Mittelfläche* der Platte diejenige Ebene, die die Plattendicke h halbiert. Die Belastungen der Platte beschränken sich auf die Normale der Mittelfläche, das heißt die Belastungen parallel zur Fläche der Platte sind Null. Die Platte wird als isomorph angenommen.

Wellen können sich in Festkörpern longitudinal und transversal ausbreiten. *Longitudinale* Wellen verändern die Geometrie der Platte nahezu nicht. *Transversale* Wellen können dabei in der Ebene der Platte verlaufen oder senkrecht dazu. Wenn

4 Theoretische Betrachtung schwingender Platten

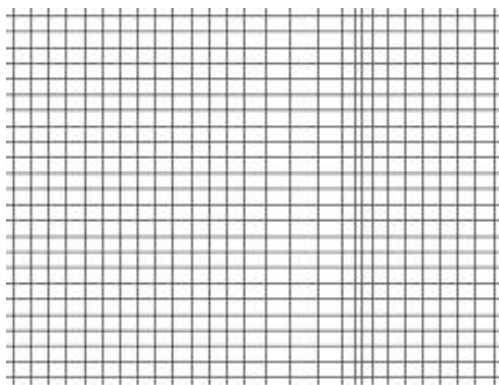


Abbildung 4.1: longitudinale Welle

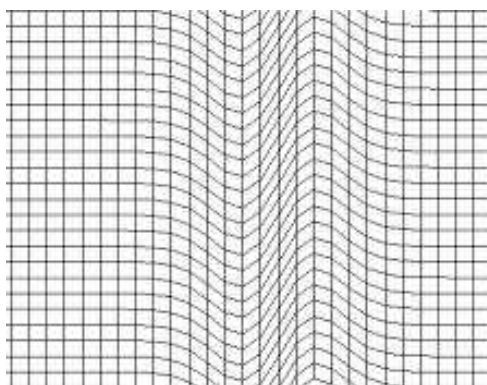


Abbildung 4.2: transversale Welle

sie in der Ebene der Platte verlaufen, verändert sich die Geometrie der Platte ebenfalls nicht. Transversale Wellen, die senkrecht zur Mittelebene verlaufen, verändern hingegen die Geometrie der Platte erheblich und sind somit diejenigen, welche für die Klangfiguren verantwortlich sind. Die ebenen transversalen Wellen und die longitudinalen Wellen können bei der Reflexion an der Außenkante der Platte ineinander umgewandelt werden, während die für die Klangfiguren entscheidenden erhalten bleiben und lediglich durch innere Streuungen und Schallabstrahlung gedämpft werden. Die Wellengeschwindigkeit ist dabei von der Frequenz abhängig. [10]

Die Verformungen durch die Wellen lassen sich mit dem HOOKEschen Gesetz beschreiben. Mit Hilfe der klassischen Elastizitätstheorie kann anhand der Verformungen die allgemeine Schwingungsgleichung in Form einer Differentialgleichung 4. Grades angegeben werden [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D} = \Delta \Delta w$$

Hierbei liegt die Mittelebene in der x-y-Ebene, w ist die Verschiebung der Mittelebene. ρ bezeichnet die Dichte, D die Plattensteifigkeit und a die Länge der Platte. $\omega = 2\pi f$ ist die Kreisfrequenz der Schwingung.

4.2 Randbedingungen

Der Elastizitätstheorie zufolge treten in der Platte drei Größen auf: das Biegemoment, das Schermoment und die Scherkraft. Bei dem starr eingespannten Rand muss die Durchbiegung w , sowie das Schermoment am Rand Null sein. Bei dem starr gestützten Rand ist die Durchbiegung und das Biegemoment gleich Null, Schermoment und Scherkraft addieren sich zur Rückhaltekraft.

Im Experiment sind die Ränder der Platten frei. Demzufolge kann sich die Platte hier frei bewegen. Somit ist der Rand kräftefrei und die Summe aus Biegemoment, Schermoment und Scherkraft verschwinden am Rand c [4]:

$$\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} \right) \right]_c = 0$$

Geschlossene Lösungen für das Problem wurden bei den genannten Randbedingungen bisher nur für die kreisrunde, sowie für die rechteckige Platte gefunden.

4.3 Die kreisrunde Platte

Nach [4] ergibt sich für die kreisrunde Platte mit freien Rändern für die Schwingung

$$\omega(\rho, \theta) = \{AJ_n(k\rho) + BI_n(k\rho)\} \cos(n\theta)$$

mit $A = \frac{3+\nu}{8}$ und $B = \frac{1+3\nu}{8}$ sowie den Eigenwerten k mit

$$k^4 = \frac{\rho h a^4 (2\pi f)^2}{D} \quad (4.1)$$

Die Frequenzgleichung lautet

$$\frac{k^2 J_n(k) + (1-\nu)\{kJ'_n(k) - n^2 J_n(k)\}}{k^2 I_n(k) - (1-\nu)\{kI'_n(k) - n^2 I_n(k)\}} = \frac{k^3 J'_n(k) + (1-\nu)n^2\{kJ'_n(k) - J_n(k)\}}{k^3 I'_n(k) - (1-\nu)n^2\{kI'_n(k) - I_n(k)\}}$$

Dabei sind J_n und I_n BESSELSche Funktionen, ν ist die POISSONSche Zahl und somit eine Materialkonstante.

Die Frequenzen sind also abhängig von ν und k und damit vom Material. Für die verwendeten Platten aus Aluminium ist $\nu \approx 0,33$ ¹. Für $\nu = 0,33$ ergeben sich folgende k -Werte für wenige Knotendurchmesser n und Knotenkreise s

¹nach Wikipedia.de, Zugriff 2.5.2007

4 Theoretische Betrachtung schwingender Platten

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0	-	-	2,292	3,497	4,65
1	3,014	4,630	5,937	7,274	8,55
2	6,209	7,737	9,16	10,55	11,95
3	9,370	10,91	12,41	13,86	15,24

Die Radien der Knotenkreise ergeben sich nach [4] aus der Beziehung

$$J_n(k\rho) = \frac{(1-\nu)[kJ'_n(k) - n^2 J_n(k) - k^2 J_n(k)]}{(1-\nu) \left[k \frac{I'_n(k)}{I_n(k\rho)} - n^2 \frac{I_n(k)}{I_n(k\rho)} + k^2 \frac{I_n(k)}{I_n(k\rho)} \right]}$$

Die Klangfiguren selbst sind damit unabhängig von Materialkonstanten. Es ergeben sich für wenige Knotendurchmesser n und Knotenkreise s folgende relative Radien

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	0,680	0,781	0,822	0,847	0,863
2	0,841	0,871	0,890	0,925	0,926
	0,391	0,497	0,562	0,605	0,635
3	0,893	0,932	0,936	0,939	0,943
	0,591	0,643	0,678	0,704	0,726
	0,257	0,351	0,414	0,460	0,498

4.4 Die rechteckige Platte

Nach theoretischen und experimentellen Ergebnissen, unter anderem von M. WALLER und B. PAVLIK, gibt es bei rechteckigen, nicht-quadratischen Platten nur Knotenlinien die parallel zu den Seitenlinien verlaufen.²

Es gibt zahlreiche Näherungslösungen für die Rechteckplatte. Die bedeutendste ist wohl die von RAYLEIGH-RITZ. Die Eigenfrequenzen einer Platte erhält man danach aus der Formel

$$\omega = \frac{k_n^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4.2)$$

²Experimentell sieht man dennoch krummlinige Klangfiguren. Für eine Erklärung siehe 4.5

4 Theoretische Betrachtung schwingender Platten

mit

$$k_n^2 = \pi^2 \lambda; \lambda^2 = G_x^4 + \frac{a^4}{b^4} G_y^4 + 2 \frac{a^2}{b^2} [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \quad (4.3)$$

m ist die Anzahl der zur y -Achse, n der zur x -Achse parallelen Knotenlinien. a und b sind die Kantenlängen der Platte. G , H und J sind von den Randbedingungen abhängig. Dabei kann jede Seitenkante unterschiedliche Randbedingungen besitzen. Für den hier relevanten Fall der freien Platte gilt

m	G_x	H_x	J_x
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ..	$m - \frac{1}{2}$	$(m - \frac{1}{2})^2 \left[1 - \frac{2}{(m - \frac{1}{2}) \pi} \right]$	$(m - \frac{1}{2})^2 \left[1 - \frac{6}{(m - \frac{1}{2}) \pi} \right]$
n	G_y	H_y	J_y
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ..	$n - \frac{1}{2}$	$(n - \frac{1}{2})^2 \left[1 - \frac{2}{(n - \frac{1}{2}) \pi} \right]$	$(n - \frac{1}{2})^2 \left[1 - \frac{6}{(n - \frac{1}{2}) \pi} \right]$

Daraus errechnen sich folgende Werte:

m	G_x	H_x	J_x	n	G_y	H_y	J_y
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1,216	1	0	0	1,216
2	1,506	1,248	5,017	2	1,506	1,248	5,017
3	2,5	4,658	11,025	3	2,500	4,658	11,025
4	3,5	10,022	18,934	4	3,5	10,022	18,934
5	4,5	17,385	28,844	5	4,5	17,385	28,844
6	5,5	26,748	40,754	6	5,5	26,748	40,754

Die Werte für x und y sind identisch, da die Randbedingungen an den Seiten ebenfalls identisch sind.

4.5 Krummlinige Klangfiguren

Obige Ergebnisse beruhen darauf, dass es nur geradlinige Knotenlinien gibt. Im Experiment treten jedoch gelegentlich auch krummlinige Knotenlinien auf. Dies ist dadurch zu erklären, dass sich zwei gleichzeitig auftretende Klangfiguren überlagern.

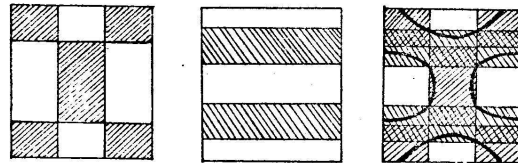


Abbildung 4.3: Überlagerung zweier Klangfiguren

Im Bild seien die positiven Auslenkungen schraffiert dargestellt, die negativen Auslenkungen dagegen weiß. Werden die beiden linken Abbildungen übereinander gelegt, so erkennt man Bereiche, welche bei beiden Figuren positiv und negativ ausgelenkt sind. Des Weiteren sind Schnittpunkte der Knotenlinien zu erkennen. Diese sind in der überlagerten Figur ebenfalls Knotenpunkte.

Die Bereiche, wo eine Figur eine positive Auslenkung hat, die andere eine negative, sind in der Überlagerung doppelt schraffiert. Hier verläuft die endgültige Knotenlinie irgendwo dazwischen.



Abbildung 4.4: Klangfiguren bei unterschiedlicher Intensität der überlagerten Figuren

Wo genau die Knotenlinie entlang läuft, ist nicht direkt ersichtlich. Je nach Intensität der beiden beteiligten Figuren können diese einen unterschiedlichen Verlauf nehmen. Abbildung 4.4 zeigt die Extrema der Überlagerung und mögliche Zwischenstufen.

5 Durchführung und Bewertung des Experimentes

Im Experiment wurden unterschiedliche Aluminiumplatten verwendet. Darunter eine rechteckige Platte mit einer Abmessung von $140\text{mm} \times 210\text{mm}$ und einer Dicke von $1,0\text{mm}$. Darüberhinaus wurden eine kreisrunde Platte mit einem Durchmesser von 230mm und einer Dicke von $1,5\text{mm}$, sowie unterschiedliche krummlinig berandete Platten getestet. Im Folgenden sollen die erhaltenen Klangfiguren mit der Theorie verglichen werden. Bei der Rechteckplatte werden die Frequenzen mit den theoretischen Erwartungen verglichen, bei der kreisrunden Platte wurden die Klangfiguren vermessen und mit den theoretischen Erwartungen für Muster und Frequenz verglichen.

5.1 Die kreisrunde Platte

Nach (4.1) gilt für die Frequenz $f = ak^2$. Da die Materialeigenschaften nicht bekannt sind wird die Proportionalitätskonstante a anhand einer Messung bestimmt.

Die Mode $n = 4, s = 1$, oder kurz $4 - 1$, bei der ein Knotenkreis und vier Knotendurchmesser auftreten, liegt bei 1963Hz . Da $k = 8,55$, folgt $a = 26,85$. Damit ergibt sich mit der Tabelle in 4.3 folgende Frequenztafel (Angaben in Hz):

5 Durchführung und Bewertung des Experimentes

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0	-	-	141	328	580
1	244	576	947	1421	1963
2	1035	1607	2253	2989	3835
3	2358	3196	4136	5158	6237

Gemessen wurden die Moden bei folgenden Frequenzen:

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0	-	-	-	-	581
1	239	546	945	1416	1963
2	1025	1600	2253	-	-
3	2337	-	-	-	-

Außerdem wurde die Mode $6-0$ bei einer Frequenz von $1257Hz$, die Mode $7-0$ bei einer Frequenz von $1648Hz$ und die Mode $8-0$ bei $2168Hz$ gemessen.

Bei den Messungen wurde der Frequenzbereich von $200Hz$ bis $2500Hz$ berücksichtigt. Mit Ausnahme der Moden $0-1$ und $1-1$ ist die Abweichung von der Theorie geringer als 1% . Der größere Fehler bei den kleinen Frequenzen könnte an der Frequenzverschiebung durch die Dämpfung liegen. Die Frequenz der maximalen Anregung ist darüberhinaus nicht genau zu bestimmen, da die Schwingung auch bei etwas höheren Frequenzen unverändert ist.

Nicht ausgeschlossen werden kann jedoch ein systematischer Fehler, da k mit Hilfe einer Messung bestimmt wurde.

Die relativen Radien der Knotenkreise wurden ebenfalls vermessen. Diese betragen:

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	0,661	0,783	0,826	0,852	0,861
2	0,835	0,870	0,887	-	-
	0,391	0,478	0,565	-	-
3	0,896	-	-	-	-
	0,591	-	-	-	-
	0,251	-	-	-	-

5 Durchführung und Bewertung des Experimentes

Der Vergleich mit 4.3 zeigt, dass die Werte sehr gut mit der Theorie übereinstimmen.

Die zu den Moden gehörenden Bilder sind im Anhang zu finden.

5.2 Die rechteckige Platte

Bei der 1mm starken Aluminiumplatte wurden die folgenden Moden gemessen:

Frequenz [Hz]	Mode (m-n)	k_n^2	$f_{theoretisch}$ [Hz]
120	2-0	22,385	126
255	2-1	47,883	269
283	0-2	50,365	283
318	krummlinig		
382	krummlinig		
479	3-1	87,991	494
547	krummlinig		
681	4-0	120,903	679
753	krummlinig		
824	krummlinig		
1122	5-0	199,859	1123
1175	4-2 (?)	216,475	1216
1241	krummlinig		
1364	krummlinig		
1525	0-4	272,031	1527
1567	1-4 (?)	284,188	1596
1657	krummlinig		
1679	6-0	298,556	1676
1730	krummlinig		
1812	6-1 (?)	322	1808
2100	3-4	373,881	2100

m sind dabei die zur langen Kante a parallelen Knotenlinien, n die zur kurzen Kante b parallelen. Die krummlinigen Moden sind nicht eindeutig zuzuordnen. Bilder zu den Messungen sind im Anhang zu finden.

Die Werte für k_n^2 wurden anhand der Gleichung (4.3) bestimmt. Die Frequenz ist durch (4.2) gegeben. Analog zur Berechnung der kreisrunden Platte wurde der Proportionalitätsfaktor anhand der Messung bei 2100Hz zu $5,617$ berechnet. Damit gilt also $f = 5,617k_n^2$.

Die berechneten Frequenzen treffen sehr gut auf die experimentell bestimmten zu. Die Abweichung ist ab 500Hz kleiner als $0,3\%$. Ähnlich wie bei der kreisrunden Platte gibt es aber bei geringen Frequenzen experimentelle Abweichungen hin zu kleineren Werten.

Bei der ermittelten Mode $4-2$ scheint es sich um eine andere Mode zu handeln, oder sie ist zumindest überlagert mit einer anderen.

5.3 Krummlinig berandete Platten

Es wurden auch unterschiedliche krummlinig berandete Platten untersucht. Erwartungsgemäß zeigten sich unregelmäßige Knotenlinien. Exemplarisch sind im Anhang Figuren auf einer $\frac{1}{4}$ -Sinai-Platte¹ und auf einer Platte in Stadion-Form angegeben.

Die Bewegungsgleichung ist hier nicht geschlossen integrierbar.

¹Eine Rechteckplatte, an deren einer Ecke ein Viertelkreis ausgespart ist.

6 Anwendungen

Fast noch zu Lebzeiten CHLADNIs fanden seine Staubfiguren durch seinen Freund, den Arzt und Physiker FELIX SAVART, eine Anwendung. 1830 versuchte er mit Hilfe von Chladnifiguren die Qualität von Geigendecken und -böden zu bestimmen. [6]

Nach wie vor werden Chladnische Klangfiguren teilweise dazu verwendet die Klangeigenschaften von Musikinstrumenten zu untersuchen. Heute wird jedoch häufig ein holographisches Verfahren angewandt um die Verformungen eines Instrumentes bei dem Bespielen zu vermessen.

Die Ergebnisse der Plattentheorie finden darüberhinaus Anwendung im Maschinen- und Flugzeugbau, sowie in der Bauindustrie. Dennoch ist dies kein abgeschlossenes Forschungsgebiet. Gerade in den letzten Jahrzehnten hat die Zahl der Veröffentlichungen über die theoretischen Grundlagen bedeutend zugenommen. Während bis in die 60er Jahre hinein klassische Untersuchungen von Platten- und Membranschwingungen im Vordergrund standen, werden Knotenmuster heute unter anderem dafür verwendet, Wellenfelder wie Schallwellen in Räumen, Lichtfelder oder Gezeitenwelle bis hin zu den in jüngster Zeit populär gewordenen „freak waves“ zu untersuchen. Abgesehen von der klassischen nichtlinearen Dynamik erlaubt die Äquivalenz zwischen der stationären Wellengleichung, der HELMHOLTZ-Gleichung und der SCHRÖDINGER-Gleichung auch die Untersuchung von chaotischen Systemen in der Quantenphysik mit Hilfe von Plattenschwingungen. [2][13]

6.1 Das Beispiel der Musik

Im Verlauf dieser Arbeit stellte sich die Frage nach der akustischen Qualität von Platten. Aufgrund der engen historischen Verknüpfung und der mit dem Experiment möglichen Untersuchungsmethoden sollen am Beispiel der Musik die Anwendungsmöglichkeiten näher aufgezeigt werden. Insbesondere wurden an der Geige sehr ausgiebige Versuche unternommen, um alten, unübertroffenen Instrumenten das Geheimnis ihres Klanges zu entlocken. Dabei kam man zu der Erkenntnis, dass die Eigenschwingungen des Geigendeckels und des Geigenbodens von grundlegender Bedeutung für den Klang einer Geige sind.

6.1.1 Musikalischer Wohlklang

Um die Chladnifiguren und die Plattentheorie in der Musik nutzen zu können, ist zunächst der physikalische Hintergrund des musikalischen Wohlklangs zu ergründen. Diese Frage ist noch lange nicht abgeschlossen aufgeklärt, zumal zahlreiche Effekte der Psychoakustik eine eindeutige Definition gar nicht zulassen würden. [14] Grundsätzlich lassen sich aber einige Eigenschaften eines als angenehm empfundenen Tones aufzeigen.

Bekanntermaßen beinhaltet ein Ton eines Musikinstrumentes nicht nur eine Grundfrequenz, sondern er ist aus unzähligen Frequenzen zusammengesetzt. So kann eine einzelne Saite eines Instrumentes nicht nur mit seiner Grundfrequenz schwingen, sondern alle harmonischen Schwingungen der Saite schwingen stets mit unterschiedlicher Intensität mit. Hinzu kommt, dass beispielsweise bei der Geige der Resonator manche Frequenzen verstärkt, andere abschwächt und zusätzlich noch weitere Eigenschwingungen ausführt. Das Ergebnis ist der uns als typisch erscheinende Geigenton, welcher darüberhinaus noch von der Umgebung sowie der Richtung, in der der Zuhörer steht, abhängt.

Die Komplexität liegt auf der Hand. Dennoch ist es Geigenbauern, wie STRADIVARI oder GUARNERI, im 17. Jahrhundert gelungen Geigen zu bauen, die bis heute als unübertroffen gelten.

6 Anwendungen

Entscheidend für den Höreindruck ist zunächst das Einschwingen eines Tones. Dies geschieht innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde. Dabei wird das Instrument zunächst mit einem Schwingungsspektrum angeregt, wovon manche Frequenzen stark gedämpft, andere hingegen durch Resonanz verstärkt werden. Bei dem Klavier ist dies der Anschlagton. Auch bei Cymbals oder bei Pauken ist der Anschlagton entscheidend. Dieser Prozess des Einschwingens ist von der Form des Resonators oder des schwingfähigen Systems entscheidend abhängig.

Der Einschwingvorgang ist schwer zu analysieren, da sich das Frequenzspektrum innerhalb von kürzester Zeit ständig ändert. Auf Grund dessen gibt es bisher nur wenige Untersuchungen zu diesem Vorgang. Dieser Einschwingvorgang ist, auch wenn er nur Bruchteile einer Sekunde andauert, dennoch oft für das menschliche Ohr von großer Bedeutung um ein Instrument zu identifizieren.

Im Experiment wurden die Bronzeplatten angeschlagen und die Frequenzspektren gemessen.

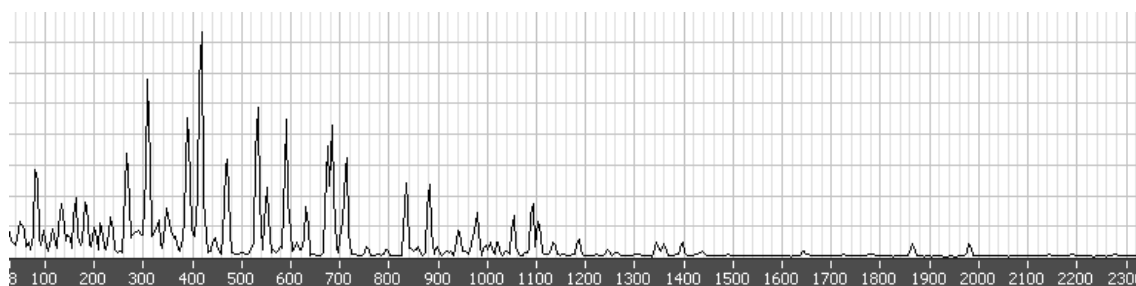


Abbildung 6.1: Spektrum der Platte CuSn20 direkt nach dem Anschlagen

Relativ gut untersucht sind hingegen die Ausschwingvorgänge sowie konstante Schwingungen wie bei der Geige. Hierbei bleibt das Frequenzspektrum über längere Zeit konstant. Die Verteilung der Frequenzen sowie die zeitliche Veränderung des Spektrums entscheidet darüber, ob der Ton als angenehm empfunden wird oder nicht. Die hier gewonnenen Erkenntnisse werden seit einigen Jahren genutzt um in einem Synthesizer Klänge unterschiedlicher Instrumente realistisch zu synthetisieren.

Experimentell wurde das Klangspektrum der Bronzeplatten nach dem Anschlagen beobachtet. Im Zeitbereich von einigen Sekunden änderte sich das Spektrum

dabei kaum.

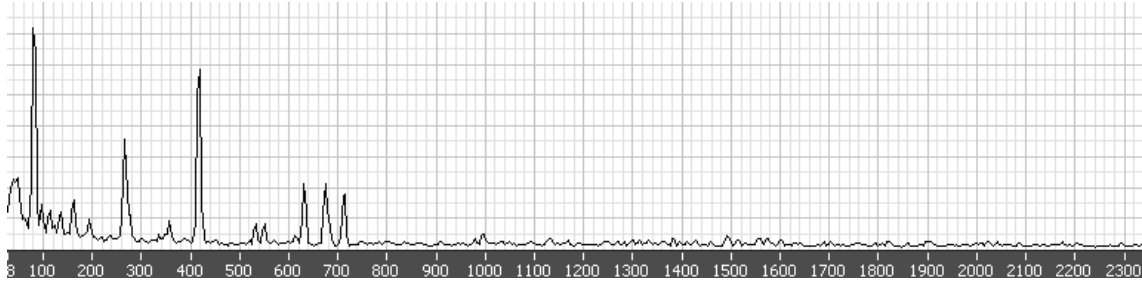


Abbildung 6.2: Spektrum der Platte CuSn20 3 Sekunden nach dem Anschlagen

Übertragung auf Musikinstrumente

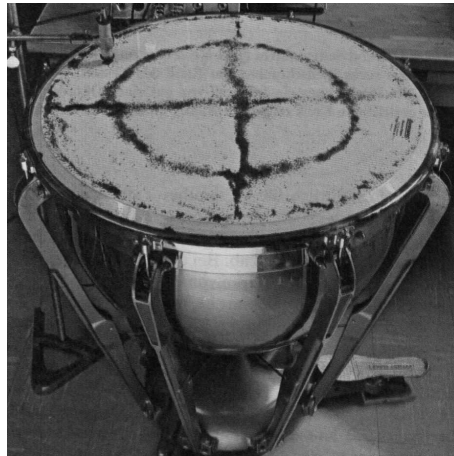


Abbildung 6.3: Chladnifigur der Mode 22 auf einer Kesselpauke, Quelle: [15]

Das am ehesten verstandene Instrument ist hier wohl die Kesselpauke. Bei dem Instrument wird ein kreisrundes Fell gespannt und durch Anschlagen mit einem Klöppel in Schwingungen versetzt. Die Spannung des Fells kann dabei über ein Fußpedal variiert werden. Dies stellt eine Membran dar, welche sich mit den mathematischen Methoden für die kreisrunde Platte beschreiben lässt.

Als komplizierter erweist sich bereits ein Cymbal oder Becken. Durch die leicht gewölbte Form lässt sich das Instrument nicht als Platte betrachten. Im Versuch zeigen sich Klangfiguren, die bei Kreisplatten nicht auftreten.

Darüber hinaus zeigt der Versuch, dass mit Hilfe von Chladnifiguren unterschiedliche Moden des Instrumentes bestimmt und die entsprechende Frequenz



Abbildung 6.4: Chladnifigur bei etwa 1200Hz auf einem Cymbal

dazu ermittelt werden kann. Mit Hilfe des entwickelten Aufbaues zur Erzeugung von Chladnifiguren kann das Instrument bei einer bestimmten Mode in Schwingungen versetzt werden. Es ist dann möglich, die Dämpfung bei dieser Mode zu messen.

Gute Cymbals zeichnen sich durch eine hohe Anzahl von Obertönen und durch einen langen Sustain¹ aus. Die Anzahl und Verteilung der Obertöne hängt nennenswert von der Form des schwingenden Körpers ab. Der Sustain dagegen hängt stark von dem verwendeten Material ab.

6.1.2 Die Verteilung der Obertöne

Im Geigenbau hat C. M. HUTCHINS ausgiebige Untersuchungen zu dem Thema angestellt, wie mit Hilfe von Chladnifiguren die Klangeigenschaft einer Geige bestimmt werden kann. Sie erlernte sogar eigens zu diesem Zweck das Handwerk des Geigenbaus [16]. Sehr entscheidend im Geigenbau sind demnach die akustischen Moden des Bodens und des Deckels der Geige. Die Geigenböden und -deckel sind dabei keineswegs isotrop. Die Maserung des Holzes, die verwendete Holzart und über die Fläche variierende Dicken beeinflussen das Klangverhalten der Platten stark.

Ein Geigenbauer fertigt den Boden und den Deckel indem er mit den Fingern

¹„Sustain“ bezeichnet die Dauer eines Ausklingvorganges eines Musikinstrumentes.

6 Anwendungen

immer wieder die Biegesteifigkeit in unterschiedliche Richtungen testet, und durch das Anklopfen der Platte an unterschiedlichen Stellen dessen Klang prüft. Durch seine jahrelange Erfahrung ermittelt er mit dieser Methode, wo er noch Material entfernen muss.

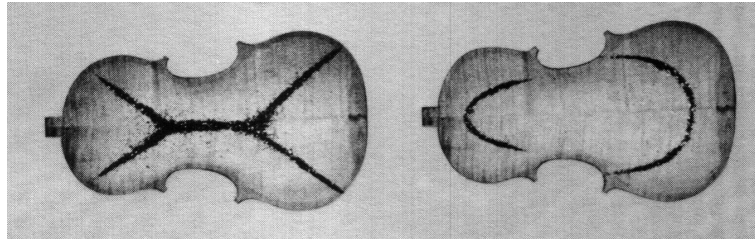


Abbildung 6.5: Moden 2 und 5 eines guten Geigenbodens

Die Untersuchung von unterschiedlichen, auch sehr guten, Instrumenten zeigt, dass die durch den Geigenbauer geprüften Elastizitäten entscheidend die Frequenz und die Form der einzelnen Moden beeinflusst. Es sollten sich bei bestimmten Frequenzen bestimmte Klangfiguren zeigen. Der Boden ist dabei etwas frequenzverschoben gegenüber dem Deckel.

Bei der zusammengebauten Geige sind die Schwingungssysteme Boden und Deckel über die Wände und den Stimmstock gekoppelt. Dadurch, sowie durch weitere auftretende Resonanzen der Geige, treten eine enorme Vielzahl an Eigenschwingungen auf. Dabei sind nicht nur die Frequenzen, sondern auch deren Phasenbeziehung entscheidend. Jahrhundertelange praktische Erfahrungen haben nunmehr Instrumente hervorgebracht, die in ihrer geschlossenen Form kaum mehr im Einzelnen verstanden sind. Dabei ist der Frequenzverlauf keineswegs linear.

Als Beispiel ist unten der Frequenzgang eines berühmten Instrumentes von GUARNERI dargestellt. Wie dieser Frequenzgang im Einzelnen aussehen sollte ist dabei eine musikalische und psychoakustische Frage.

6.1.3 Die zeitliche Veränderung des Spektrums

Während die Verteilung der Resonanzen vor allem eine Frage der Form des schwingenden Körpers und der Anregung ist, wie im oben genannten Beispiel der Geigen-

6 Anwendungen

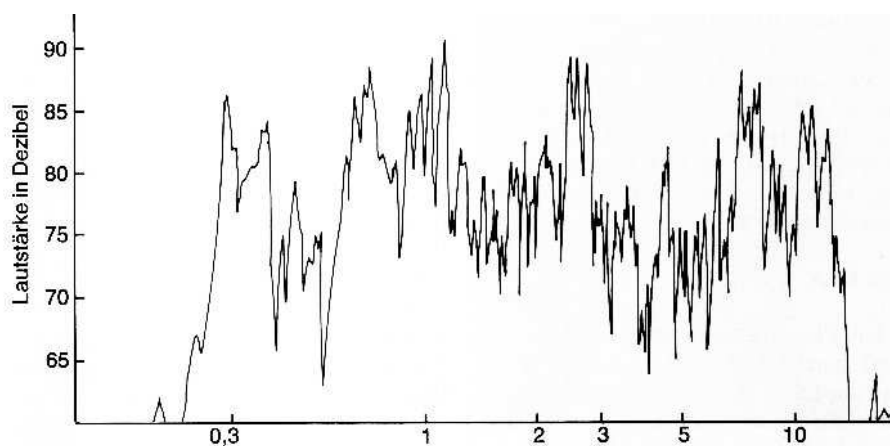


Abbildung 6.6: Frequenzgang einer guten Geige, Quelle: [16]

kasten, so wird bei abklingenden Instrumenten, wie dem Klavier oder dem Cymbal, die zeitliche Veränderung des Klangspektrums zusätzlich durch die Dämpfung bestimmt.

Die Dämpfung ist insbesondere von dem verwendeten Material abhängig. Die in der Schwingung gespeicherte Energie, in Form von Spannungen und kinetischer Energie, wird zum Teil als Schall abgestrahlt. Der Rest geht in Form von Wärme verloren. Die konstruktionsbedingte Ableitung der Schwingung in andere Teile des Instrumentes wird dabei vernachlässigt.

Dieser Energieverlust kann mit Hilfe des entwickelten Experimentes bestimmt werden. Hierzu wurden zunächst die unterschiedlichen Platten angeschlagen und der Verlauf des Spektrums beobachtet. Bei der Aluminiumplatte und der Stahlplatte dominierte bereits nach einer Sekunde deutlich die Grundfrequenz der Platte. Alle anderen Frequenzen wurden sofort gedämpft. Der Klang der Platten ist dabei sehr dumpf. Die Bronzeplatten veränderten das Klangspektrum nach dem anfänglichen Einschwingen nur langsam. Unterschiede im Ausklingen waren dabei kaum feststellbar.

In einem weiteren Versuch wurden die Bronzeplatten bei unterschiedlichen Frequenzen zum Schwingen gebracht. Da die Eigendämpfung exponentiell von der Amplitude abhängt sind die Halbwertszeiten eine aussagekräftige Größe für die Dämpfung. Dabei hatte die Platte mit einem Zinngehalt von 8% eine Halbwerts-

6 Anwendungen

zeit von etwa $1,5s$, frequenzunabhängig bis etwa $1000Hz$. Bei höheren Frequenzen stieg die Dämpfung stark an. Die Platten mit einem Zinngehalt von 15% und 20% hatten bis etwa $1300Hz$ eine Halbwertszeit von $2s$. Bei höheren Frequenzen stieg auch hier die Dämpfung, jedoch nicht so stark wie bei der zinnarmen Platte. Bei einer Optimierung des Aufbaus könnte eine genauere Aussage über die Plattenqualitäten getroffen werden.

Kirchenglocken sind Instrumente, welche ebenfalls eine minimale Eigendämpfung haben sollten. Im Laufe der Jahrhunderte wurde die Erfahrung gemacht, dass der optimale Zinngehalt der Glockenbronze bei 22% liegt. Diese Erfahrung wurde durch die vorliegenden Beobachtungen an den Platten bestätigt[16].

7 Zusammenfassung der Ergebnisse

Aus den unterschiedlichen möglichen Anregungsmöglichkeiten einer Platte hat sich bei der gegebenen Zielsetzung die Wirbelstromanregung als die am besten geeignete erwiesen. Die Platte wurde dabei auf Spiralfedern gelegt, um zusätzliche Randbedingungen und damit Verfälschungen der Ergebnisse zu vermeiden. Eine hohe Materialdämpfung der Platte stellte sich als vorteilhaft heraus, da diese durch die breiteren Resonanzen diese leichter aufzuspüren sind.

Die Steuerung des Experimentes erfolgt über die Soundkarte eines PC. Eine für das Experiment entwickelte Software wird dabei sowohl als Signalgenerator, als auch zur Analyse der Plattenschwingung eingesetzt.

Für die im Experiment verwendeten Platten und die relevanten Randbedingungen wurden die wichtigsten Grundlagen aus der Plattentheorie aufgezeigt und die Frequenzen und Klangfiguren berechnet. Geschlossene Lösungen gibt es dabei nur für die kreisrunde und die rechteckige Platte.

Die berechneten Werte wurden im Folgenden experimentell ermittelt. Dabei zeigte sich, dass die Abweichung von Theorie und Praxis im Bereich der Messungenauigkeiten liegt. Für höhere Frequenzen ist die Abweichung kleiner als 1%, bei geringeren Frequenzen war der Fehler etwas größer.

Die vielseitigen Anwendungen der Plattenschwingungen wurden abschließend dargestellt. Historisch betrachtet finden die CHLADNischen Klangfiguren dabei ihre Anwendung in der Untersuchung des Klangverhaltens von Musikinstrumenten.

7 Zusammenfassung der Ergebnisse

An diesem Beispiel wurden die Anwendungsverfahren näher beschrieben und die Relevanz des Experimentes gezeigt.

A Bilder der Chladnifiguren

A.1 Die kreisrunde Platte

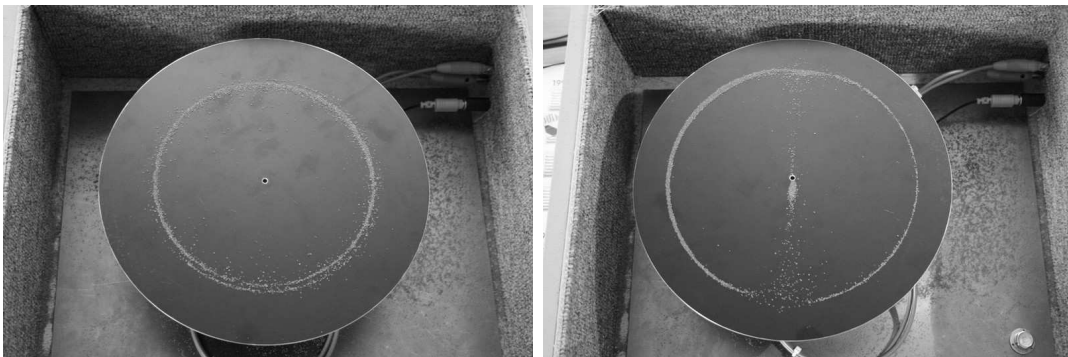


Abbildung A.1: Mode 0-1, $239Hz$

Abbildung A.2: Mode 1-1, $546Hz$

Bei der Mode 1-1 ist die Klangfigur nicht scharf, da sich die Knotendurchmesser drehen. Dies wurde durch Berührung mit dem Finger bei anderen Figuren unterbunden. Bei vielen Knotendurchmessern ist dies nicht nötig, da durch den kleinen Schwingungsbauch das Knotenmuster bereits durch die Anregung fixiert wird.

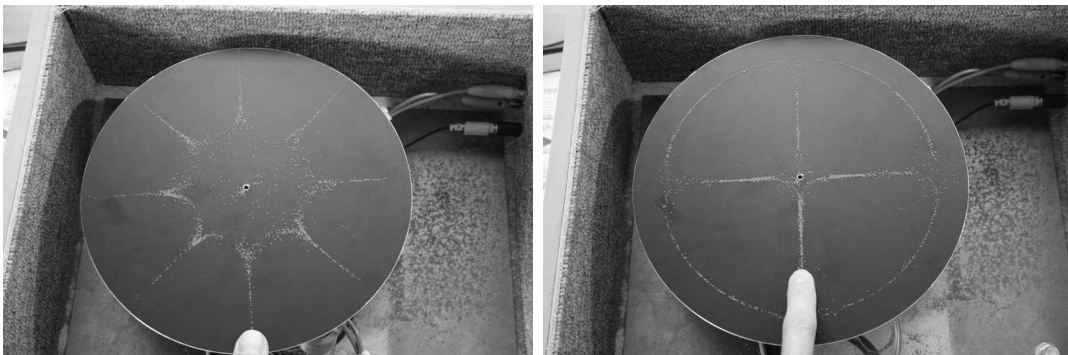


Abbildung A.3: Mode 4-0, $581Hz$

Abbildung A.4: Mode 2-1, $945Hz$

A Bilder der Chladnifiguren



Abbildung A.5: Mode 0-2, 1023Hz



Abbildung A.6: Mode 6-0, 1257Hz

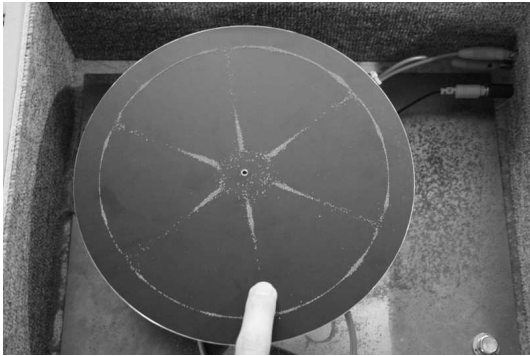


Abbildung A.7: Mode 3-1, 1416Hz



Abbildung A.8: Mode 1-2, 1600Hz



Abbildung A.9: Mode 7-0, 1648Hz



Abbildung A.10: Mode 4-1, 1963Hz

A Bilder der Chladnifiguren

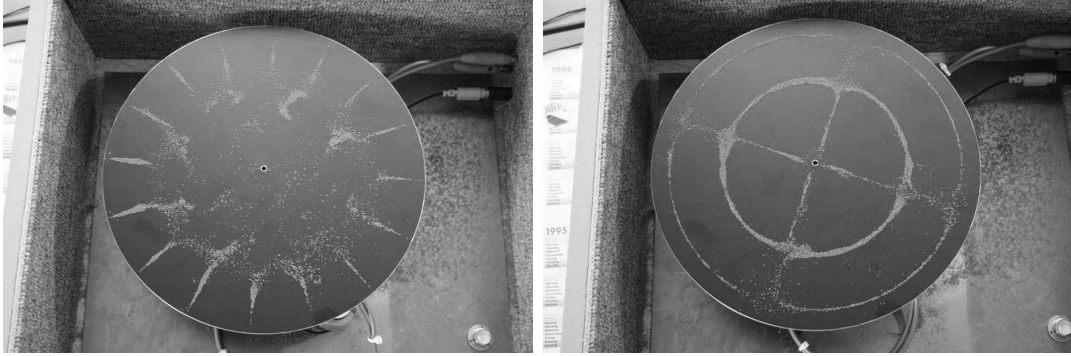


Abbildung A.11: Mode 8-0, 2168Hz Abbildung A.12: Mode 2-2, 2253Hz



Abbildung A.13: Mode 0-3, 2337Hz

A.2 Die rechteckige Platte

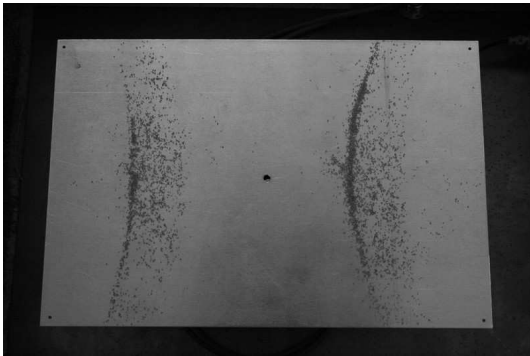


Abbildung A.14: Mode 2-0, 120Hz

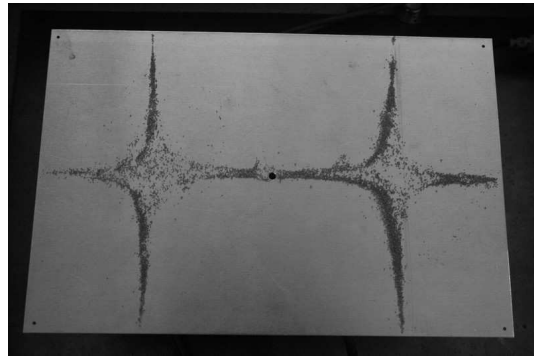


Abbildung A.15: Mode 2-1, 255Hz

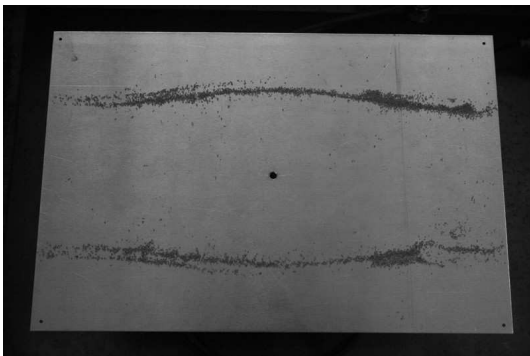


Abbildung A.16: Mode 0-2, 283Hz

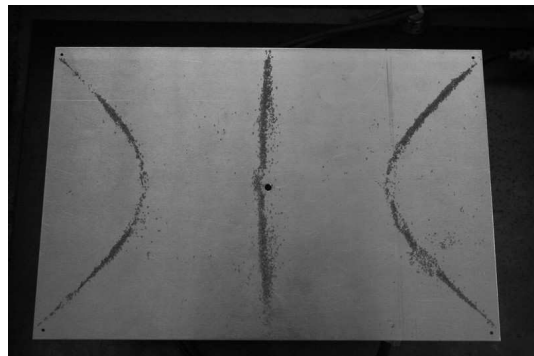


Abbildung A.17: krummlinig, 318Hz

A Bilder der Chladnifiguren

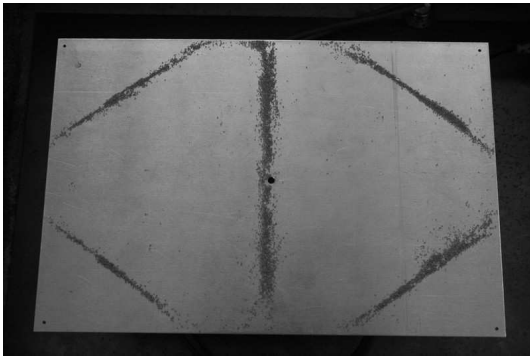


Abbildung A.18: krummlinig, $382Hz$

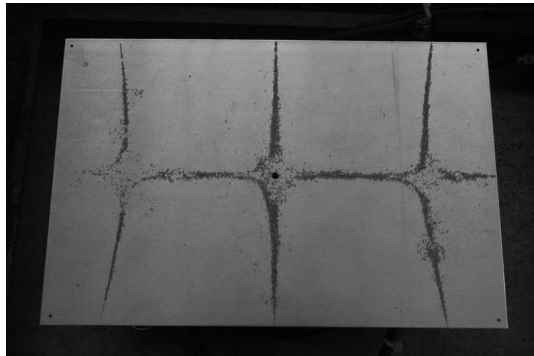


Abbildung A.19: Mode 3-1, $497Hz$

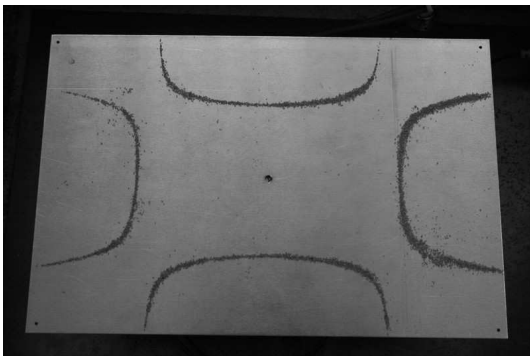


Abbildung A.20: Krummlinig, $547Hz$

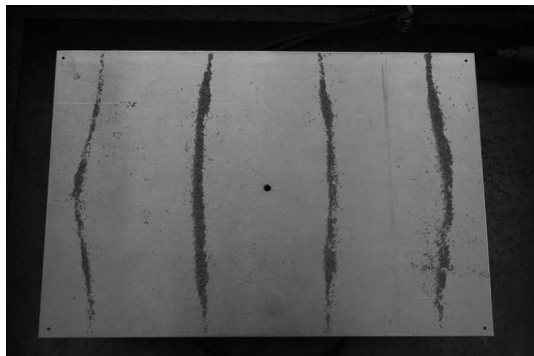


Abbildung A.21: Mode 4-0, $681Hz$

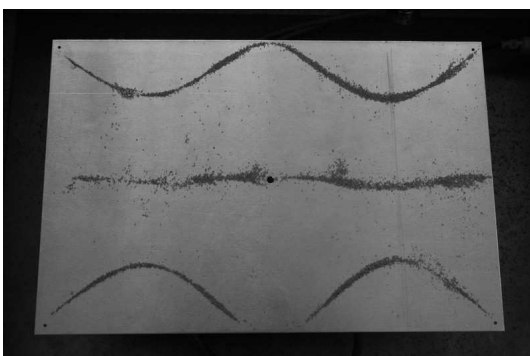


Abbildung A.22: krummlinig, $753Hz$

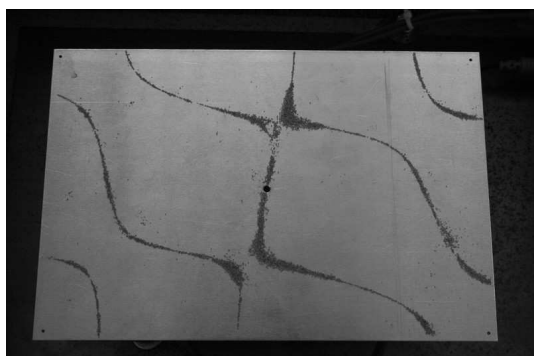


Abbildung A.23: krummlinig, $824Hz$

A Bilder der Chladnifiguren

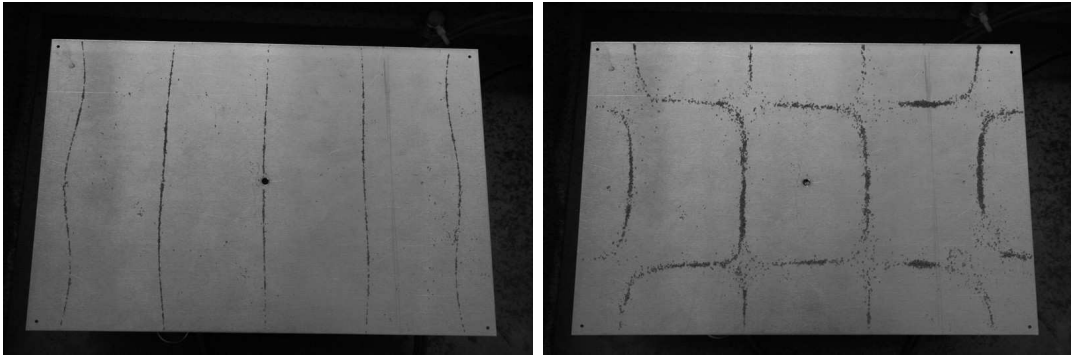


Abbildung A.24: Mode 5-0, $1122Hz$ Abbildung A.25: Mode 4-2(?), $1175Hz$

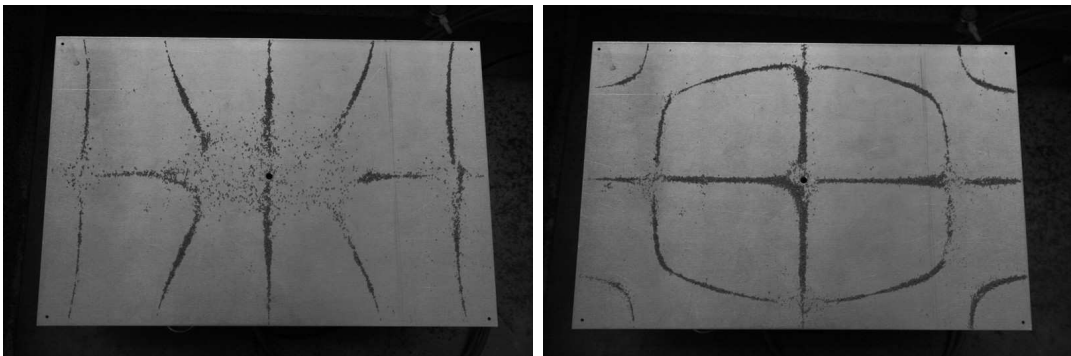


Abbildung A.26: krummlinig, $1241Hz$ Abbildung A.27: krummlinig, $1364Hz$

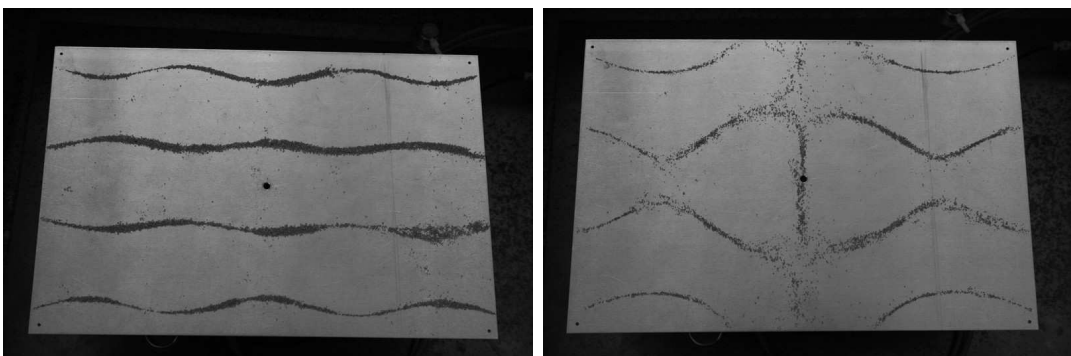


Abbildung A.28: Mode 0-4, $1525Hz$ Abbildung A.29: Mode 1-4(?), $1567Hz$

A Bilder der Chladnifiguren

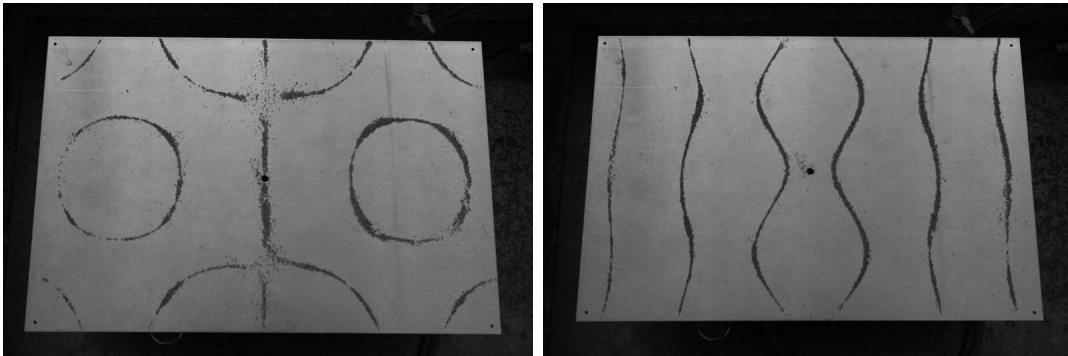


Abbildung A.30: krummlinig, $1657Hz$ Abbildung A.31: Mode 6-0, $1679Hz$

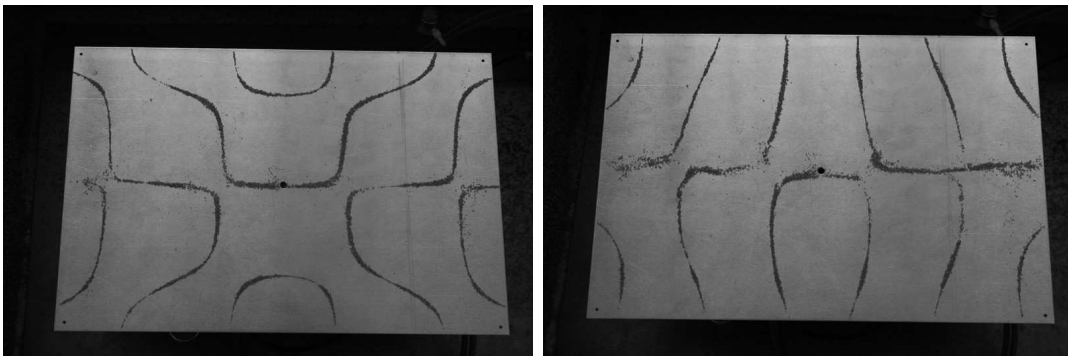


Abbildung A.32: krummlinig, $1730Hz$ Abbildung A.33: Mode 6-1, $1812Hz$

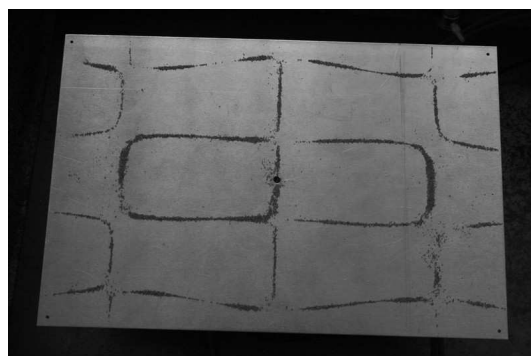


Abbildung A.34: Mode 3-4, $2100Hz$

A.3 Krummlinig berandete Platten

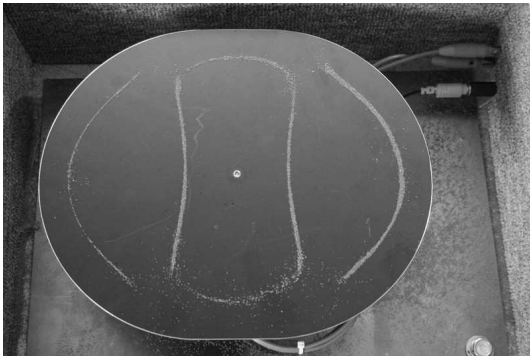


Abbildung A.35: Stadion-Platte

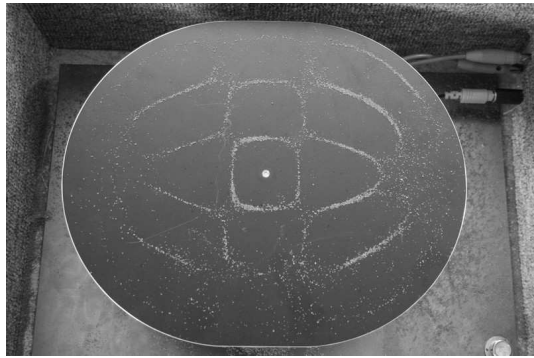


Abbildung A.36: Stadion-Platte



Abbildung A.37: Sinai-Platte

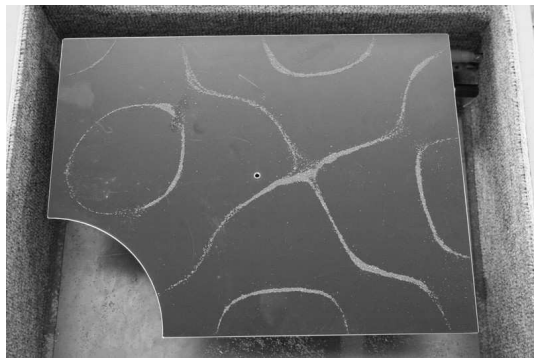


Abbildung A.38: Sinai-Platte



Abbildung A.39: Sinai-Platte

Literaturverzeichnis

- [1] E. F. F. CHLADNI, Die Akustik, Breitkopf und Härtel, Leipzig (1802)
- [2] H.-J. STÖCKMANN, Ein Nomade der Wissenschaft, Physik Journal 5 (11), Weinheim (2006)
- [3] T. D. ROSSING, Chladni's law for vibrating plates, American Journal of Physics 50 (3), Melville USA (1982)
- [4] U. HANDT, R. ZIMMERMANN, Selbsterregung von Platten- und Membranschwingungen, Staatsexamensarbeit, Philipps-Universität Marburg (1976)
- [5] H. C. JENSEN, Production of Chladni figures on Vibrating Plates Using Continuous Excitation, American Journal of Physics 23 (503), Melville USA (1955)
- [6] C. M. HUTCHINS, Klang und Akustik der Geige, in: Die Physik der Musikinstrumente, Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg (1988)
- [7] M. FARADAY, Comment on „Chladni Plates revisited“, American Journal of Physics 73 (3), Melville USA (2005)
- [8] W. S. GONTKEWITSCH „Sobstwennie kolebania plastinok i obolotschek“, Kiew (1964)
- [9] W. S. GONTKEWITSCH „Eigenschwingungen von Platten und Schalen“, Arbeitsübersetzung von [8], VEB Fachbuch Verlag, Leipzig (1967)
- [10] K. SCHAADT „Experiments on Acoustic Chaology and Statistical Elastodynamics“, Ph.D. Thesis, University of Copenhagen (2001)

Literaturverzeichnis

- [11] H. ESCHENAUER, W. SCHNELL „Elastizitätstheorie I“, 2. Auflage, BI Wissenschaftsverlag, Zürich (1986)
- [12] E. MEYER, D. GUICKING „Schwingungslehre“, Vieweg, Braunschweig (1974)
- [13] H.-J. STÖCKMANN „Quantum Chaos - an introduction“, Cambridge University Press, Cambridge (1999)
- [14] G. ESKA „Schall und Klang - Wie und was wir hören“, Birkhäuser, Basel (1997)
- [15] T. D. ROSSING „Die Pauke“, in: „Die Physik der Musikinstrumente“, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg (1988)
- [16] C. M. HUTCHINS „Violinen“ und „Klang und Akustik der Geige“, in: „Die Physik der Musikinstrumente“, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg (1988)
- [17] A. H. BENADE „Fundamentals of musical Acoustics“, Dover Publications, New York (1990)
- [18] J. R. RIERCE „Klang - Musik mit den Ohren der Physik“, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1999)

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und sämtliche Stellen, die den benutzten Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, mit Quellenangaben kenntlich gemacht sind. Alle wörtlich entnommenen Stellen sind als Zitate kenntlich gemacht. Alle aus anderen Werken entnommene Abbildungen sind mit der Quelle angegeben.

Der Datenträger, auf dem der Text der Arbeit gespeichert wurde, befindet sich in meinem Besitz.

Marburg, den 16. Mai 2007

Dirk Winkel